Г. Н. БЕРМАН

ПРИЕМЫ СЧЕТА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1959

Г. Н. БЕРМАН

ПРИЕМЫ СЧЕТА

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ

МОСКВА 1959

АННОТАЦИЯ

Книга Г Н. Бермана фактически состоит из дополнительных глав арифметики и может служить повышению арифметической культуры широкого круга читателей. Наряду с правилами для умножения дробей в ней излагаются правила для вычисления корней и приближенного умножения, которые могут оказаться интересными и для квалифицированного читателя.

В третьем издании книги, осуществленном под редакцией А. Л. Брудно, были сделаны небольшие уточнения. Наиболее важные из них следующие:

Старое название «Приемы быстрого счета» заменено названием «Приемы счета», так как книга не имеет ничего общего с вычислительными фокусами и приемами эстрадных вычислителей.

В разделе о письменном решении процентных задач вместо трех арифметических правил дано одно алгебраическое, которое запоминается мнемонически.

Слегка изменен и расширен раздел о квадратных корнях. Настоящее, шестое, издание книги печатается без изменений.

Берман Георгий Николаевич
Приемы счета
Редактор *Н. А. Угарова*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из предисловия ко второму изданию 4

Глава I. **Устный счет**

Общие замечания 5
Сложение 6
Вычитание 8
Простейшие случаи умножения и деления 10
Умножение и деление на 5, 25, 50. Увеличение в $1^1/_2$ раза. Умножение на 15. 11
Умножение на 9, 11, 99, 101 . 13
Умножение на 3, 6 и 7 . . . 14
Умножеиие многозначных чисел 15
Несколько слов о делении в уме 18
Проценты 20

Глава II. **Письменные вычисления**

О записи чисел 23
Степени десяти 24
Сложение и вычитание . . . 26
Умножение и деление на десять и степени десяти. Отрицательные степени десяти 29
Умножение и деление на однозначное число . . . 31
Умножение многозначных чисел 32
Деление многозначных чисел 36
Вычисления с простыми и десятичными дробями . . 37
Процентные вычисления . . 43

Глава III. **Приближенные вычисления**

Точные и приближенные значения величин 49
Абсолютная и процентная погрешность 51
Некоторые особенности записи приближенных чисел. Число верных знаков после запятой 53
Число верных цифр и его связь с процентной погрешностью 55
Действия над приближенными числами. Округление 56
Сложение и вычитание приближенных чисел 59
Умножение приближенных чисел 61
Устное умножение приближенных чисел, содержащих по три верные цифры 66
Деление приближенных чисел 68
Как ставить запятую при приближенном умножении и делении 72
О приближенном извлечении квадратных корней . . . 73
Извлечение корней из чисел с тремя верными цифрами 75
Извлечение корней с любым числом цифр 79
Вычисления по формулам . 82
Некоторые формулы приближенных вычислений . . . 84

Заключение 88

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга не является учебником. Она не претендует ни на полноту, ни на систематичность изложения. Здесь собраны простые приемы, которые помогают ускорить вычисления, ускорить не какие-нибудь сложные расчеты, а самые обычные числовые выкладки, с которыми постоянно приходится иметь дело в быту и особенно на производстве. Книга рассчитана на квалифицированного рабочего или техника-практика. Чтение ее не требует никаких специальных знаний, не нужно знать даже элементарной алгебры. Но предполагается, что читатель вполне свободно владеет обычными приемами счета с целыми и дробными числами.

Книга не является учебником. Но, разумеется, если ее читать как рассказ, то это будет пустой тратой времени. Математическая книга, даже самая простая, требует работы. Читать ее нужно внимательно, с карандашом в руках, выполняя все нужные выкладки и закрепляя каждое понятое правило решением примеров. Примеров в книжке много, но даны они без ответов, так как проверить себя очень легко: достаточно те же примеры проделать не упрощенным, а обычным путем.

Выводов и доказательств в книжке нет. Но там, где это не очень загромождает изложение, даются необходимые объяснения. Кое-где терминология немного отличается от обычной. Это иногда позволяет упростить изложение. В главе о приближенных вычислениях рассматриваются почти исключительно вычисления с той степенью точности (относительная погрешность в 1%), которая чаще всего требуется при технических расчетах.

ГЛАВА I
УСТНЫЙ СЧЕТ
Общие замечания

Каждый из нас умеет считать в уме; в магазинах, в столовых, в автобусе — везде приходится иметь дело со счетом. Особенно важно уметь считать производственнику. Почти ни одна квалифицированная работа не обходится без предварительного подсчета. Одним приходится при этом возиться с карандашом и бумагой; другие считают в уме, но считают медленно, часто ошибаются и сильно устают; третьи считают легко и уверенно.

Для того чтобы быстро и уверенно считать в уме, не нужно иметь ни специальных знаний, ни способностей. Несколько простых правил, а главное — постоянная тренировка в устном счете, — помогут научиться хорошо считать. Бывают люди, которые быстро множат и делят в уме четырех- и пятизначные числа. Достичь такого искусства трудно, надо помнить много правил, очень долго и утомительно тренироваться. Это искусство в практической жизни почти не может пригодиться. Наша задача — научиться работать с двузначными, иногда — с трехзначными числами. Этого для быта и производственной практики достаточно. *Если же встретятся бо́льшие числа, то лучше, вернее, сделать вычисления на бумаге.*

Если нужно сделать много расчетов, то и в простых случаях лучше не считать в уме. Устный счет не всегда медленнее, но почти всегда утомительнее. При большом объеме работы или начинают считать медленнее, или делают ошибки. Лица, которым приходится много считать, должны пользоваться вычислительными приборами.

В первую очередь арифмометром — для точных вычислений — и логарифмической линейкой — для приближенных. Логарифмическая линейка — незаменимый прибор для «процентных» вычислений с точностью до 1%.

Напомним некоторые арифметические термины. Числа, которые складываются, называются *слагаемыми*. Результат сложения называется *суммой*.

То число, из которого мы вычитаем, называется *уменьшаемым*, число, которое мы вычитаем, называется *вычитаемым*, результат вычитания называется *разностью чисел*. Возьмем такой пример: $25-7=18$. Здесь 25 — уменьшаемое, 7 — вычитаемое, 18 — разность.

Числа, которые перемножаются, называются *множителями* или *сомножителями*. Иногда один из сомножителей называют *множимым*, другой — *множителем*, но такое различие несущественно: и множимое и множитель совершенно равноправны. Результат умножения называется *произведением*. То число, которое делят на другое называют *делимым*; то число, на которое делят, называют *делителем*. Результат деления называют *частным*. Разделим, например, 18 на 6. Получим 3. Здесь 18 — делимое, 6 — делитель, 3 — частное.

Не всегда деление проходит так гладко. Разделим, например, 22 на 7. Получим 3 и *в остатке* единицу. Поделив остаток на 7, найдем одну седьмую. Значит, $22:7=3\frac{1}{7}$. Результатом деления целых чисел может быть дробное число (в нашем примере — целое с дробью).

Сложение

Складывать в уме очень легко; и все-таки о сложении нужно сказать несколько слов. Ведь сложение — основное действие, поэтому складывать надо очень быстро и уверенно.

Начнем с прибавления однозначного числа. Прибавить 5 к 23 совсем просто: будет 28. Важнее тот случай, когда единицы обоих слагаемых дают в сумме больше десятка и этот десяток нужно держать в уме. Прибавим, например, 8 к 87. Здесь лучше рассуждать так. В восьмидесяти семи не хватает до 90 тройки, а 8 равняется сумме трех и пяти. 87 да 3 — девяносто, да еще 5 — всего 95. Еще пример: 119 + 7. Семь равно единице плюс шесть; 119 да единица — будет 120, да еще шесть — всего 126. Итак, однозначное слагаемое представляем в виде суммы двух меньших чисел, из которых одно дополняет большее слагаемое до целых десятков. Самая небольшая тренировка приводит к тому, что это разложение выполняется совершенно автоматически, без всякого усилия воли или внимания. При работе на русских (конторских) счетах такое разложение делают постоянно.

Так же прибавляется число, состоящее из целого числа десятков или сотен. Прибавим, например, 50 к 272. Говорим: 272 да 30 даст 302, да еще 20 — всего 322. И здесь разбиваем слагаемое, состоящее из целых десятков, на два (50 = 30 + 20), одно из которых (30) дополняет десятки большего слагаемого (семь десятков) до целой сотни.

Примеры: 326 + 9; 148 + 7; 94 + 8; 112 + 6; 243 + 80; 567 + 70; 192 + 20; 341 + 50; 1460 + 50; 277 + 70.

Если оба слагаемых — многозначные числа, то к большему прибавляем сначала старший разряд меньшего, потом — младший разряд. Так, если прибавляется двузначное число, то сначала прибавляют десятки, потом единицы. Сложим, например, 343 и 25. Говорим: 343 да 20 будет 363, да еще 5 — всего 368. Так же поступают при сложении бóльших чисел. Если нужно сложить 8365 и 376, то рассуждают так: 8365 да 3 сотни, будет 8665, да семь десятков — 8735, да шесть единиц — всего 8741.

Отметим случай, когда сложение упрощается. Если одно из слагаемых близко к целому числу десятков или сотен (вообще — к «круглому» числу), то рассуждают так: пусть нужно сложить 173 и 59. 59 это 60 без единицы. Прибавляем 60 — будет 233, а нам нужно было прибавить 59, значит единицу нужно отнять; получится 232. Точно так же, если к 882 нужно прибавить 197, то говорим так: 197 это 200 без трех. 882 да 200 будет 1082, отнимая 3, получим 1079.

Если оба числа близки к «круглым», например, если нужно сложить 98 и 395, то рассуждаем так: 98 — это 100 без двух; 395 — это 400 без пяти. 100 да 400 даст 500; отнимаем 2, будет 498, отнимем еще 5, будет 493. Это и есть искомая сумма.

Примеры: 263 + 25; 384 + 49; 298 + 96; 4532 + 93; 882 + 161; 766 + 419; 89 + 77; 8122 + 891; 395 + 88.

Если нужно сложить в уме несколько двузначных чисел, то обычно сначала складывают все десятки, потом все единицы. Сложим, например, 26, 17, 85 и 43. Рассуждаем так. Двадцать да 10 будет 30, да еще 80 — будет 110, да 40 — всего 150; запоминаем. Шесть и семь дает 13, да 5 — будет 18, да еще 3 — всего 21. Сто пятьдесят да двадцать один — всего получится 171. Этот прием всегда быстро ведет к цели. Так же складываются и бо́льшие числа, например, три или четыре трехзначных числа, но при этом приходится «держать в уме» несколько сумм, так что легко сбиться. Неопытному человеку лучше большие числа складывать на счетах или на бумаге.

Примеры. 39 + 48 + 13; 56 + 13 + 18; 24 + 17 + + 14 + 47; 88 + 75 + 39; 11 + 26 + 8 + 44; 58 + 43 + 92.

Вычитание

При вычитании однозначного числа возможны два случая. Если однозначное число меньше последней цифры уменьшаемого, то действие выполняется совсем просто. Например, отнимем от 28 число 6. Получим 22. Если же однозначное число больше последней цифры уменьшаемого, например, от 42 нужно отнять 7, то удобнее рассуждать так. Семь — это 5 + 2 (2 — последняя цифра уменьшаемого). От 42 отнимаем 2, получим 40; от 40 отнимем 5, получим 35.

Так же рассуждаем, если нужно вычесть число, состоящее из целых десятков. Отнимем, например 60 от 243. Шестьдесят — это 40 + 20; отнимаем от 243 сорок, получим 203; отнимаем еще 20, останется 183.

Примеры. 43 — 8; 58 — 7; 135 — 9; 260 — 40; 52 — 7; 43 — 6; 116 — 8; 116 — 70; 1003 — 40.

Если вычитается двузначное или еще большее число, то сначала отнимаем сотни (если они есть), потом десятки, потом единицы. Вычтем, например, 27 из 243. От 243 отнимаем 20, остается 223. Но $7=4+3$ (3 — последняя цифра уменьшаемого). Значит, отнимаем от 223 число 3, остается 220, да еще отнимаем 4 — получаем ответ: 216.

Можно рассуждать иначе. От 243 хотим отнять 27. Но 27 — это 30 без трех. Прибавим по 3 и к уменьшаемому и к вычитаемому; результат не изменится. Получим 246 и 30. От 246 отнимаем 30; получаем 216.

Если одно из чисел или оба близки к «круглым», то удобно сначала произвести действие над круглыми числами, а потом внести поправку. Отнимем, например, 296 от 1285. Число 296 меньше трехсот всего на 4 единицы. Поэтому сначала отнимаем от 1285 число $300=200+100$ (в уменьшаемом как раз 2 сотни). От 1285 отнимаем 200 — получается 1085, да еще отнимем 100 — получится 985. Остается прибавить 4 единицы — 989. Это и есть искомый ответ.

Примеры. $463-25$; $326-83$; $561-59$; $1020-98$; $241-91$; $881-95$; $624-73$; $815-27$; $827-39$; $111-87$; $1063-120$; $822-48$; $516-123$.

Подытожим все сказанное.

Если нужно сложить два числа, то к большему прибавляем меньшее; сначала прибавляем сотни, потом десятки, потом единицы (сначала — старшие разряды, потом — младшие).

Если слагаемые (оба или одно) *близки к «круглым» числам, то складываем эти «круглые» числа и учитываем нужную поправку.*

При сложении нескольких двузначных чисел складываем сначала все десятки, потом все единицы и к общему числу десятков прибавляем единицы.

Несколько больших чисел (трехзначных и бóльших) целесообразнее складывать на бумаге.

Если нужно вычесть однозначное число, меньшее последней цифры уменьшаемого или равное ей, то затруднений не возникает.

Если нужно вычесть однозначное число, большее последней цифры уменьшаемого, то разбиваем это *однозначное число на два (равное последней цифре уменьшаемого и остаток) и вычитаем полученные числа одно за другим.*

При вычитании двузначных (и многозначных) чисел сначала отнимаем старшие разряды вычитаемого, потом младшие его разряды.

Если вычитаемое близко к «круглому» числу, то сначала отнимаем это «круглое» число, а затем делаем поправку.

Простейшие случаи умножения и деления

Умножать и делить проще всего на 10, 100, вообще на число, изображаемое единицей с нулями. *При умножении на такие числа мы приписываем к множимому столько нулей, сколько их имеется во множителе.* Умножим, например, 173 на 100. Получается 17 300.

Почти так же поступаем при делении на число, изображаемое единицей с нулями. Отделяем запятой столько последних цифр, сколько имеется нулей в делителе. Разделим, например, 2650 на 100. Получаем 26,50 или 26,5 (двадцать шесть целых и 5 десятых). Ответ чаще всего получается дробный.

Примеры. $2240:10$; 51×100; 37×1000; $83\times10\,000$; $62\,000:100$; $84\,000:10$.

Почти так же просто умножение на 2 и на 4. Умножаем на 2, начиная со старших разрядов. Умножим, например, 347 на 2. Рассуждаем так: триста на два будет шестьсот; сорок на два будет 80 — итого шестьсот восемьдесят; семь на два даст 14. Итого — шестьсот восемьдесят да 14 — будет шестьсот девяносто четыре.

Умножение на 4 *сводится к двукратному умножению на* 2. Умножим, например, 596 на 4. Умножим 596 на 2. Пятьсот на 2 даст тысячу, 90 на 2 даст 180, значит имеем 1180, да еще $2\times6=12$. Тысяча сто восемьдесят да двенадцать будет 1192. Это число нужно еще раз удвоить. Тысяча на 2 будет 2000, да $100\times2=200$, всего 2200, да $90\times2=180$, всего 2380, да $2\times2=4$, всего 2384. Это и есть искомый ответ.

Таким же образом можно умножить на 8 (три раза последовательно умножить на 2), на 16 и т. д.

Примеры. 365×2; 643×2; 97×2; 88×2; 915×2; 63×4; 76×4; 112×4; 31×8; 1285×2; 23×8; 288×4; 51×16; 165×4.

При делении пополам делим пополам все разряды, начиная с высшего, попутно складывая получающиеся результаты. Разделим, например, 364 пополам. Триста пополам даст 150, шестьдесят пополам будет 30; 150 да 30 будет 180; остается прибавить 4, деленное пополам, т. е. 2. Получится 182.

Можно делить на 2 и по-другому. Пусть нужно разделить 364:2. Рассуждаем так: 3 делить на 2 будет 1... и 1 в остатке; 16 на 2 будет 8; 4 на 2 будет 2. Таким образом, получается 182.

При делении на 4 делим сначала на 2, затем полученное частное еще раз на 2. Разделим, например, 1938 на 4. Делим пополам: тысяча пополам будет 500, да 900 пополам будет 450, итого 950, тридцать пополам даст 15, итого 965; восемь пополам даст 4; всего 969. Полученное число делим еще раз пополам. Девятьсот пополам будет 450, да шестьдесят пополам — тридцать — всего 480, да 9 пополам — четыре с половиной. Всего получается $484\frac{1}{2}$. Не нужно удивляться, что ответ получился с дробью. При делении почти всегда так и бывает.

Только в редких случаях деление чисел, взятых из практической задачи, приводит к целому числу.

Если нужно разделить на 8 или на 16, то будем три или четыре раза последовательно делить на 2.

Примеры. 116:2; 98:2; 264:2; 39:2; 1486:2; 932:2; 216:4; 536:4; 512:8: 1488:8; 134:4; 17:4.

Умножение и деление на 5, 25, 50. Увеличение в $1\frac{1}{2}$ раза. Умножение на 15

Умножение на 5 сводится к делению пополам, деление на 5 — к умножению на 2. Умножим, например, 387 на 5. Рассуждаем так: чтобы умножить на 5, можно умножить на 10 и результат разделить пополам.

387 умножаем на 10; получаем 3870. Делим 3870 пополам: три тысячи пополам — полторы тысячи; восемьсот пополам — четыреста; итого 1900; да еще 70 пополам даст 35. Всего получится 1935. Значит, $387 \times 5 = 1935$.

Разделим теперь 6145 на 5. Для этого удвоим данное число и результат разделим на 10. Умножаем 6145 на 2. Шесть тысяч на 2 — двенадцать тысяч, сто на 2 — двести, всего 12200; 40 на 2 даст 80, всего 12280, пять на 2 — десять; всего 12290. Разделив на 10, получим 1229. Значит, $6145:5 = 1229$.

Вот еще пример, где результат получится с дробью. Разделим 283 на 5. Для этого умножаем 283 на 2. Получим $2 \times 200 = 400$, да $2 \times 80 = 160$, итого 560, да $2 \times 3 = 6$, всего 566. Разделив 566 на 10, получим пятьдесят шесть целых и шесть десятых.

При умножении на 25 мы умножаем на 100 и делим на 4. При делении на 25 — умножаем на 4 (т. е. два раза на 2) и делим на 100. При умножении на 50 умножаем на 100 и делим пополам; при делении на 50 сначала удваиваем, потом делим на 100.

Примеры 1. Умножим 137 на 25. Умножаем 137 на 100. Получим 13 700. Делим это число пополам: десять тысяч пополам — пять тысяч, три тысячи пополам — полторы тысячи; всего шесть с половиной тысяч; семьсот пополам — триста пятьдесят. Всего 6850. Это число еще раз делим пополам. Получим 3425. Таким образом, $137 \times 25 = 3425$.

2. Разделим 218 на 50. Удваиваем 218; получим 436. Полученное число делим на 100. Получим четыре целых и тридцать шесть сотых. Значит, $218:50 = 4{,}36$.

Примеры. 32×5; 117×5; 89×5; 46×5; 28×25; 63×25; 19×50; $295:5$; $515:5$; $83:5$; $675:25$; $1050:50$; $285:25$; $1285:50$; $92:5$; $751:50$.

Очень легко увеличить некоторое число в $1\frac{1}{2}$ раза. Для этого нужно к самому числу прибавить его половину.

Умножим, например, число 87 на $1\frac{1}{2}$. Половина от 87 будет 40 да $3\frac{1}{2}$ — сорок три с половиной. 87 да 40 даст

127, да еще 3 — всего 130, да $\frac{1}{2}$ — всего $130\frac{1}{2}$. Это и есть искомый ответ.

Уменье умножать число на $1\frac{1}{2}$ позволяет дать простое правило для умножения на 15. Умножим, например, 342 на 15. Сначала умножаем 342 на 10, получим 3420. Это число увеличим в $1\frac{1}{2}$ раза, т. е. прибавим к нему его половину. Половина от 3420 будет 1710. Складывая 3420 и 1710, получим 5130. Значит, $342 \times 15 = 5130$. Итак, *чтобы умножить некоторое число на* 15, *мы увеличиваем его в* 10 *раз и к полученному числу прибавляем половину того, что получилось.*

Примеры. $64 \times 1\frac{1}{2}$; $38 \times 1\frac{1}{2}$; $292 \times 1\frac{1}{2}$; $35 \times 1\frac{1}{2}$; $49 \times \frac{1}{2}$; 26×15; 38×15; 164×15; 618×15; 41×15; 19×15.

Умножение на 9, 11, 99, 101

Чтобы умножить какое-нибудь число на 9, нужно увеличить его в 10 раз и от полученного результата отнять само данное число. Умножим, например, 87 на 9. Рассуждаем так: $87 \times 10 = 870$. Остается от 870 отнять 87. Но 87 близко к 90 (не хватает трех единиц). Прибавим к уменьшаемому и вычитаемому по 3: получим 873 и 90. Отнимая 90 от 873, получим 783. Значит, $87 \times 9 = 783$.

Чтобы умножить какое-нибудь число на 11, нужно увеличить его в 10 раз и к полученному результату прибавить само данное число. Возьмем то же, что и в предыдущем примере, число 87 и умножим его на 11. Увеличив 87 в десять раз, получим 870. Прибавим теперь 87. Восемьсот семьдесят да восемьдесят $(80 = 30 + 50)$ даст 950 да еще 7 — девятьсот пятьдесят семь. Значит, $11 \times 87 = 957$.

Эти правила очень полезны и почти всегда заметно облегчают счет, но не следует думать, что их нужно применять во всех случаях. Иногда бывает легче умножать попросту. Если, например, число записано с помощью единиц и нулей, то умножаем его на 9 непосредственно.

Умножим 101 на 9. Ясно, что получится 909 и никаких специальных правил применять не нужно.

Заметим еще один прием умножения двузначного числа на 11. Раздвинем цифры двузначного числа и вставим между ними их сумму. Получим нужный результат. Умножим, например, 24 на 11. Раздвигаем цифры 2 и 4 (2...4) и между ними вставляем сумму $2+4=6$. Получим 264. Значит, $24 \times 11 = 264$.

Если сумма цифр двузначного числа сама является двузначной, то ее единицы вставляем между цифрами данного числа, а десятки прибавляем к первой цифре. Например, 67 умножаем на 11. Раздвигаем цифры 6 и 7 (6...7) и между ними вставляем $6+7=13$. Получим 6(13)7. Теперь тройку оставляем на месте, а единицу прибавляем к шести. Получим 737. Значит, $67 \times 11 = 737$. При небольшом навыке все это легко делается в уме.

Особенно просто умножение двузначного числа на 101. Нужно мысленно приписать справа к данному числу его самого и прочесть то, что получится. Умножим, например, 73 на 101. Пишем (мысленно) семьдесят три и приписываем справа еще семьдесят три. Получим семь тысяч триста семьдесят три. Это и есть искомый результат: $73 \times 101 = 7373$.

Нетрудно сообразить, как поступать при умножении на 99. Нужно, очевидно, увеличить данное число в 100 раз и от полученного числа отнять само данное число. Если, например, нужно 34 умножить на 99, то сначала умножаем 34 на 100; получим 3400. Теперь от 3400 отнимаем 34. Отнимая 30, получим 3370; отнимая еще 4, получим 3366. Значит, $34 \times 99 = 3366$.

Примеры. 24×9; 37×9; 125×9; 48×11; 29×11; 63×11; 27×11; 62×101; 54×9; 99×9; 13×101; 15×99; 163×11; 88×11.

Умножение на 3, 6 и 7

При умножении двузначного числа на 3, на 6 или на 7 сначала умножаем десятки, потом единицы, затем оба результата складываем. Умножим, например, 86 на 3. Восемьдесят на три даст двести сорок $(3 \times 8 = 24)$, а трижды шесть — восемнадцать. 240 да 18 будет 258.

Помножим еще 35 на 7. Тридцать на семь — двести десять, семью пять — тридцать пять. 210 да 35 будет 245. Так же выполняется умножение на 6.

Трехзначное число умножается на три по такому же правилу: сначала умножаются сотни, потом — десятки, потом — единицы, потом все складывается. Умножать по такому же правилу на 6 было бы невыгодно; пришлось бы «держать в уме» большие числа. Лучше сначала умножить данное число на 3, а затем результат удвоить. Умножим, например, 519 на 6. Умножаем сначала 519 на 3. Пятьсот, умноженное на три, даст 1500; десять, умноженное на 3, даст тридцать. Всего получается 1530; да еще 9, умноженное на 3, даст 27. Прибавляем к 1530 это число (27) и получаем 1557. Теперь удваиваем 1557. Полторы тысячи дадут при удвоении 3000, а пятьдесят семь при умножении на два дает 114. Всего получается 3114. Значит, $519 \times 6 = 3114$.

Умножение многозначных чисел на 7 делается тем же приемом, что и умножение на 3. Но при этом приходится «держать в уме» большие числа; *тому, кто не имеет специальной тренировки, лучше умножать многозначные числа на семь на бумаге.*

Примеры. 67×3; 29×3; 116×3; 285×3; 24×6; 49×6; 51×7; 19×7; 216×6; 811×6; 1261×3; 715×3; 93×6; 92×7; 49×7; 212×3; 212×7; 97×6.

Умножение многозначных чисел

При умножении многозначных чисел в уме неопытные счетчики часто делают ошибки. Поэтому лучше многозначные числа перемножать на бумаге. Но в некоторых случаях умножение выполняется легко. Особенно важно научиться перемножать в уме двузначные числа; это делается просто и постоянно встречается в жизни.

Прием, которым при этом пользуются, называется «умножением крестиком». Возьмем два двузначных числа, например 53 и 37, и подпишем их одно под другим:

$$\begin{array}{ccc} 5 & & 3 \\ | & \times & | \\ 3 & & 7 \end{array}$$

Умножая десятки на десятки, получим сотни. В нашем примере 3 десятка, умноженных на 5 десятков, дадут 15 сотен, т. е. тысячу пятьсот. Перемножив простые единицы, получим в нашем примере двадцать один ($3\times7=21$). Всего получается 1521. Короче это число можно было получить так: к произведению десятков (15) приписываем справа произведение единиц (21); получаем 1521. Но это еще не все. Нужно учесть произведение единиц каждого числа на десятки другого. Имеем (в нашем примере): семь раз пять десятков — тридцать пять десятков, да три раза три десятка — девять десятков; итого тридцать пять да девять — сорок четыре десятка, т. е. 440. Значит, к 1521 нужно добавить четыреста сорок. Получим 1961.

При практических вычислениях схема не рисуется. Все рассуждения проводятся в уме. Как это делается, будет видно из следующего примера. Умножим 68 на 47. Перемножаем десятки. Четырежды шесть — двадцать четыре; перемножаем единицы: семью восемь — пятьдесят шесть. Мысленно справа от двадцати четырех пишем пятьдесят шесть — получим две тысячи четыреста пятьдесят шесть. Далее выполняем умножение «крест-накрест»: шестью семь — сорок два десятка и четырежды восемь — тридцать два десятка — всего семьдесят четыре десятка, т. е. семьсот сорок. К двум тысячам четыремстам пятидесяти шести прибавляем семьсот, получаем три тысячи сто пятьдесят шесть, да еще сорок — три тысячи сто девяносто шесть. Это число и есть искомый ответ. Итак, $68\times47=3196$.

Отметим некоторые особенно простые случаи. Если каждый из сомножителей меньше двадцати, например, если надо умножить 18 на 13, то прибавляем к первому единицы второго ($18+3=21$), мысленно приписываем нуль (210) и прибавляем произведение единиц ($3\times8=24$): двести десять да двадцать четыре — двести тридцать четыре.

Если нужно умножить само на себя двузначное число, оканчивающееся пятью, то делаем так. Первую цифру увеличиваем на единицу и результат умножаем на саму первую цифру. К тому, что получится, мысленно справа приписываем 25.

Пример. Умножим 75 на 75. Семь да один — восемь, семью восемь — пятьдесят шесть; приписываем справа 25 — получим 5625.

Если один из сомножителей близок к «круглому» числу, то умножаем на это «круглое» число и делаем поправку. Пример: умножим 37 на 98.

Рассуждаем так: 98 — это сто без двух. Значит, умножим 37 на 100 и отнимем от результата 37, умноженное на 2. Тридцать семь, умноженное на сто, даст три тысячи семьсот; тридцать семь на два даст семьдесят четыре. Значит, от трех тысяч семисот нужно отнять семьдесят четыре. Получим 3626.

Если оба сомножителя близки к «круглому» числу, причем один из них больше, а другой меньше его на одно и то же число единиц, то поступаем так. Умножаем «круглое» число само на себя и от того, что получится, отнимаем разницу между «круглым» числом и данными числами, тоже умноженную саму на себя. Умножим, например, 97 на 103. Оба сомножителя отличаются от сотни на 3 единицы, только одно больше сотни на 3, а другое меньше сотни на 3. Сто, умноженное на сто, даст 10 000, а трижды три — девять. Отняв от 10 000 девять, получим 9991. Еще пример: умножим 62 на 58. Оба сомножителя отличаются от 60 на 2 единицы. Шестьдесят на шестьдесят даст 3600, дважды два — четыре. От 3600 отнимаем 4, получим 3596 *).

Примеры. 43×16; 17×19; 18×18; 12×17; 32×97; 53×67; 22×83; 17×85; 28×82; 81×79; 202×198; 15×16; 72×68; 43×53; 25×25; 35×35; 85×85; 69×85; 502×498; 95×95.

Особенно просто перемножаются два двузначных числа, каждое из которых содержит по 9 десятков.

---

*) Для читателей, знакомых с началами алгебры, заметим, что это правило основано на известной формуле умножения суммы двух величин на их разность:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Умножим, например, 94 на 97. Дополним 97 до ста — получим 3; эту тройку отнимем от 94 — получим 91. Это и будут две первые цифры произведения. Дополним 94 до 100; получим 6. Перемножим дополнения: $3 \times 6 = 18$. Это будут последние две цифры произведения. Значит, $97 \times 94 = 9118$. Итак, для перемножения двузначных чисел, содержащих каждое по 9 десятков, дополняем их до ста. Из множимого вычитаем дополнение множителя; это даст первые две цифры произведения. Перемножаем дополнения; это даст последние две цифры произведения.

Примеры. 97×92; 93×95; 96×96; 98×91; 95×94; 93×93.

Несколько слов о делении в уме

Делить в уме значительно труднее, чем множить. Кроме случаев, упомянутых в начале главы (деление на 2, 4, 5, 25 и т. д.), стоит отметить только деление сравнительно небольших чисел на однозначное число. При этом приходится выполнять в уме те действия, которые мы привыкли делать на бумаге. Разделим, например, 95 на 7. Девять десятков дадут при делении на 7 один десяток, причем два десятка останутся неиспользованными. Эти два десятка да 5 единиц — всего двадцать пять единиц — дадут при делении на 7 в частном три и в остатке — четыре. Значит, ответ будет: тринадцать в частном и четыре в остатке, или $13\frac{4}{7}$.

Примеры. 87:3; 126:3; 59:7; 97:2; 95:3; 147:7; 159:9; 90:11; 116:3; 104:13; 51:3; 91:7; 189:9; 89:9; 1000:3.

В связи с делением стоит вопрос об отыскании той или иной доли данного числа. Действительно, чтобы найти половину какого-нибудь числа, например 562, достаточно разделить его на 2. В нашем примере получим 281. Чтобы найти одну треть некоторого числа, нужно его разделить на 3. Умея делить в уме на 2, 4, 8, 5, 10, 25, 50, 100, 3, 6, 7, мы можем находить половину, четверть, восьмую, пятую, десятую и другие доли данного числа. Нетрудно найти двадцатую долю некоторого числа: для этого нужно разделить пополам его десятую долю.

Найти три четверти какого-нибудь числа можно двумя способами: прежде всего нужно найти одну четверть числа. Потом одно из двух: или умножить найденную четвертушку на 3, или отнять ее от самого числа. Найдем, например, $\frac{3}{4}$ от 748. Делим 748 на 4. Семьсот пополам — триста пятьдесят, да сорок восемь пополам — двадцать четыре, всего триста семьдесят четыре. Полученное число делим еще раз пополам: триста пополам — сто пятьдесят, да семьдесят пополам — тридцать пять (всего 185), да четыре пополам — два, всего 187. Это — четвертая часть. Делая первым способом, умножаем на три: трижды сто — триста, да трижды восемьдесят — двести сорок (всего пятьсот сорок), да трижды семь — двадцать один; всего 561. Делая вторым способом, отнимаем найденную четвертушку (187) от самого данного числа (748). Вычитаемое близко к круглому числу (к 200), недостает только тринадцати. Прибавляем к уменьшаемому 13, получаем 761; отнимаем двести — остается 561.

Второй прием годится во всех случаях, когда числитель искомой доли на единицу меньше знаменателя, а первый — во всех без исключения случаях. Значит, первый прием более общий, зато второй — в тех случаях, когда он пригоден — немного проще.

Вычислим первым приемом $\frac{5}{8}$ от 344. Находим $\frac{1}{8}$; для этого делим 344 на 8. Сначала делим 344 пополам — получаем 172; делим еще раз пополам — получаем 86, делим еще раз пополам — получаем 43. Это — одна восьмая доля от 344. А нам нужно 5 таких долей. Остается умножить 43 на 5. Сорок три на десять — четыреста тридцать. Делим пополам — 215. Значит, $\frac{5}{8}$ от 344 составят 215.

Вычислим (вторым приемом) $\frac{6}{7}\cdot$ от 1449. Одна седьмая от 1449 равна 207 ($1449 = 14$ сотен, да еще 49; 14 сотен дают при делении на 7 две сотни, а сорок девять при делении на семь дает 7). Остается отнять 207 от 1449. Получаем 1242. Это и есть искомая доля.

Примеры. Найти $\frac{3}{4}$ от 1972; $\frac{2}{5}$ от 1035; $\frac{7}{20}$ от 5420; $\frac{19}{20}$ от 3340; $\frac{1}{7}$ от 837; $\frac{2}{3}$ от 5343; $\frac{4}{3}$ от 711 (лучше всего поступать так: найти одну треть от 711 и прибавить ее к 711); $\frac{10}{9}$ от 387 (как в предыдущем примере); $\frac{3}{10}$ от 6812.

Проценты

Процентом называется одна сотая часть данной величины. Если на заводе работает 2000 человек, то 20 человек составляют один процент (записывают: 1%) от всего количества работающих. Трудно представить себе область человеческой деятельности, в которой не пришлось бы иметь дела с процентами. В процентах выражают прирост населения, ход выполнения производственной программы; в процентах ведут учет соцсоревнования; проценты выплачивают нам сберкассы. Поэтому очень важно уметь быстро и безошибочно решать задачи, связанные с процентами.

Простейшие задачи нужно научиться решать в уме.

С процентами связаны три основных вида задач. *Прежде всего* задачи, в которых *дается некоторая величина и требуется найти другую величину, составляющую от данной указанное число процентов. Во-вторых,* задачи, в которых *даются две величины и требуется узнать, сколько процентов от одной из величин составляет вторая. В-третьих, дается некоторое число и указывается, сколько процентов от искомой величины оно составляет; требуется найти саму величину.*

Прежде чем перейти к разбору этих трех задач, обратим внимание на помещенную ниже таблицу. Эта таблица дает соотношение между числами процентов некоторой величины и соответствующими ее долями.

Таблицу нужно помнить наизусть, если не целиком, то во всяком случае соотношения, отмеченные звездочками.

Проценты	Доли	Проценты	Доли	Проценты	Доли
50	$\frac{1}{2}$ *	10	$\frac{1}{10}$ *	60	$\frac{3}{5}$
2	$\frac{1}{50}$ *	75	$\frac{3}{4}$ *	80	$\frac{4}{5}$
25	$\frac{1}{4}$ *	1	$\frac{1}{100}$ *	$33\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{25}$ *	15	$\frac{3}{20}$	$66\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
20	$\frac{1}{5}$ *	40	$\frac{2}{5}$	$12\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
5	$\frac{1}{20}$ *				
100% — вся величина *					

Решим теперь задачу первого типа. На заводе 2140 рабочих, из них 30% мужчин. Сколько на заводе работает мужчин?

Нужно, очевидно, найти 30% от числа 2140. Тридцать — это 3×10. Найдем сначала 10%, т. е. десятую часть. Это будет 214 человек. А 30% — в три раза больше. Умножаем 214 на 3, получаем 642. Значит, на заводе 642 мужчин.

Вот еще пример: норма выработки 225 деталей. Рабочий перевыполнил норму на 16%. Сколько деталей сделал он сверх нормы?

Рассуждаем так: 16 — это 4 раза 4. Найдем 4% и увеличим то, что получится, в 4 раза. Но 4% — это $\frac{1}{25}$ часть величины. Значит, нужно 225 разделить на 25. Получим 9. Умножив 9 на 4, получим 36. Значит, сверх нормы изготовлено 36 деталей.

Переходим к задачам второго типа. У меня было 5 рублей, я израсходовал 3 рубля. Сколько процентов своих денег я израсходовал?

Прежде всего сообразим, что искомое число процентов не изменится, если мы оба числа 5 р. и 3 р. увеличим в одинаковое число раз. Теперь увеличим оба числа в 20 раз. От этого 5 превратится в 100, а 3 в 60. Итак, израсходовано 60% имевшейся суммы.

Более сложные задачи этого типа приводят обычно к делению на двузначное число. Мы их рассмотрим во второй главе.

В заключение решим задачу третьего типа. В классе 6 отличников, что составляет 20% всего состава класса. Сколько в классе учеников?

Рассуждаем так: 20% — это пятая доля. Пятая доля класса состоит из шести учеников. Значит, всего в классе $5 \times 6 = 30$ учеников.

Еще пример. Забраковано 18 деталей, что составляет $2\frac{1}{2}$% всей продукции. Сколько всего было изготовлено деталей? Если $2\frac{1}{2}$% составляют 18 деталей, то 5% составляют 36 деталей, а 10% дадут 72 детали. Но 10% — это $\frac{1}{10}$ часть всей продукции. Значит, всего было изготовлено $72 \times 10 = 720$ деталей.

Примеры. Найти: 2% от 368; 3% от 720; 5% от 640; $12\frac{1}{2}$% от 128; 4% от 725; $2\frac{1}{2}$% от 40 ($2\frac{1}{2}$% — это половина от 5%); $1\frac{1}{2}$% от 1400; 75% от 80; 50% от 3; $2\frac{1}{2}$% от 240; 15% от 1280; 10% от 3,5.

Найти: какой процент (вместо «сколько процентов» часто говорят «какой процент») составляет 8 от 10? 6 от 20? 100 от 1000? 10 от 50? 1 от 8? 9 от 50? 12 от 48? $\frac{1}{2}$ от 1? 3 от 75?

10% какой величины равны трем?
5% какой величины равны семи?
25% какой величины равны $\frac{1}{4}$?

ГЛАВА II

ПИСЬМЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

О записи чисел

Напомним читателям, как записывают целые и дробные числа по десятичной системе. Основное правило состоит в следующем: из двух цифр, стоящих рядом, левая обозначает «единицы», в десять раз бóльшие, чем правая.

Если написано целое число (без дроби), то крайняя правая цифра обозначает простые единицы, левее идут десятки, еще левее — сотни, затем тысячи и т. д. Если имеется целое число с дробью, то целая часть отделяется запятой. Правее запятой идут десятые доли, правее десятых — сотые, еще правее — тысячные и т. д. Если «единицы» какого-нибудь разряда отсутствуют, то на соответствующем месте ставится нуль. Например, запись 1023,502 обозначает число, содержащее одну тысячу, не содержащее сотен, имеющее два десятка, три единицы, пять десятых долей, не содержащее вовсе сотых долей и имеющее две тысячные доли (читается: тысяча двадцать три целых, запятая, пятьсот две тысячных).

Если число не содержит вовсе целой части (такие числа называются *правильными дробями)*, то пишут сначала нуль, потом запятую, а за ней по обычным правилам дробную часть. Например, двадцать семь сотых запишется так: 0,27 (читают: нуль целых, запятая, двадцать семь сотых); триста четыре десятитысячных запишется так: 0,0304; семь тысячных — так: 0,007.

Степени десяти

Очень часто приходится иметь дело с числами, имеющими много нулей на конце. Возьмем примеры:

1) Население СССР составляло в 1939 г. 170 500 000 человек.

2) Расстояние от Земли до Солнца равно 149 500 000 *км*.

3) Поверхность всей суши земного шара равна 14 900 000 000 *га*.

Такие числа трудно записывать и читать.

Чтобы облегчить запись, используют понятие *степени числа*. Произведение числа само на себя называют *квадратом* этого числа. Например $9 = 3 \times 3$; значит, 9 есть квадрат трех. Точно так же 100 есть квадрат десяти. Квадрат тридцати пяти равен 1225 и т. д. Результат перемножения трех одинаковых сомножителей, равных каждый данному числу, называется *кубом* данного числа. Например, умножив 2 на 2, получим 4; умножив еще раз на 2, получим 8; иными словами, $8 = 2 \times 2 \times 2$. Говорят, что 8 есть куб числа 2. Точно так же 27 есть куб числа 3 (трижды три — девять, да еще раз на три — трижды девять — двадцать семь), 1000 есть куб десяти и т. д.

С квадратами чисел мы встречаемся при вычислении площадей участков, с кубами — при вычислении объемов тел. Площадь квадратного участка, сторона которого равна 9 *м*, будет $9 \times 9 = 81$ *кв. м*. Объем комнаты, длина, ширина и высота которой равны по 4 *м*, будет $4 \times 4 \times 4 = 64$ кубометрам.

Иногда приходится перемножать более трех одинаковых сомножителей. Произведение четырех одинаковых сомножителей называется *четвертой степенью* данного числа, пяти — *пятой степенью* и т. д. Например, число 81, равное $3 \times 3 \times 3 \times 3$, будет четвертой степенью трех. Произведение $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ будет пятой степенью двух. 1 000 000 будет шестой степенью десяти. Нетрудно сообразить, что всякая степень десяти изобразится единицей с нулями, причем нулей будет столько, какова степень. (Заметим, что квадрат числа называют иначе второй степенью, куб — третьей степенью.) Действительно, 10 в квадрате даст $10 \times 10 = 100$ (два нуля); 10 в кубе даст $10 \times 10 \times 10 = 1000$ (три нуля); 10 в четвертой степени даст $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$ (четыре нуля) и т. д.

Любую степень любого числа можно записать как ряд одинаковых чисел, соединенных знаками умножения (пример: $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$). Но такой способ записи очень громоздок. Поэтому придумали сокращенную запись. Число, которое нужно умножить несколько раз само на себя (его называют *основанием* степени), пишут только один раз, а справа сверху ставят маленькую цифру, которая показывает, какая степень числа берется. Например, пишут 5^3 вместо $5 \times 5 \times 5$. Пишут 10^6 вместо $1\,000\,000$ и т. д. Эта маленькая цифра, показывающая, сколько раз данное число повторяется сомножителем, называется *показателем* степени. Значит, в нашем примере ($10^6 = 1\,000\,000$) миллион будет степенью (*шестой* степенью) десяти; десять будет основанием; шесть — показателем.

Примеры. а) Записать без показателей:

$$2^4 = 16;\ 3^5 = ?\ 5^2 = ?\ 7^3 = ?$$

б) Записать короче с помощью знака показателя: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$; $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$; $10\,000\,000\,000$; $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$; $17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17$.

Вернемся к нашей первой задаче: как сокращенно записать числа с большим числом нулей на конце? Рассмотрим какое-нибудь число такого вида, например $314\,000\,000$. Мы можем представить это число как произведение двух чисел: числа без нуля на конце и числа, состоящего из единицы с нулями:

$$314 \times 1\,000\,000.$$

Но вместо «единицы с нулями» мы можем написать степень десяти (в нашем примере — шестую степень), значит:

$$314\,000\,000 = 314 \times 10^6.$$

Вместо креста часто ставят другой знак умножения — точку (пишут $3\cdot 2=6$ вместо $3\times 2=6$).

Тогда запись числа с большим числом нулей на конце станет особенно простой:

$$314\,000\,000=314\cdot 10^6.$$

Запишем в обычной форме и прочитаем число $51\cdot 10^5$. Десять в пятой степени — это «единица с пятью нулями», значит, нужно к пятидесяти одному приписать справа пять нулей: 5 100 000.

Получили пять миллионов сто тысяч.

Вернемся к примерам, помещенным в начале этого параграфа. Мы имели:

1) Население СССР в 1939 г. было 170 500 000 человек.

2) Расстояние от Земли до Солнца равно 149 500 000 *км*.

3) Поверхность суши земного шара равна 14 900 000 000 *га*.

Эти числа мы запишем теперь так:

1) Население СССР в 1939 г. было $1705\cdot 10^5$ человек.

2) Расстояние от Земли до Солнца равно $1495\cdot 10^5$ *км*.

3) Поверхность всей суши равна $149\cdot 10^8$ *га*.

Примеры. Записать короче, пользуясь степенями десяти, следующие числа: 180 000; 3 200 000; 43 400; 5 183 000 000; 9 600 000 000; 1 700 000; 20 000 000.

Записать в обычной форме и прочитать следующие числа: $43\cdot 10^3$; $12\cdot 10^5$; $3\cdot 10^{11}$; $683\cdot 10^8$; $51\,342\cdot 10^2$; $1\,616\cdot 10^4$; $17\cdot 10^7$: $2\cdot 10^{12}$; $48\cdot 10^5$; $117\cdot 10^6$.

Сложение и вычитание

О сложении и вычитании говорить почти нечего. Общепринятая запись является наиболее удобной. *Важно только аккуратно подписывать единицы под единицами, десятки под десятками и т. д.* Рекомендуется ставить знаки действий и при вычитании отмечать точкой, когда приходится «занимать» единицу из высшего разряда. Тогда вычисление легко проверить.

П р и м е р ы.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ +\begin{array}{r} 18\,862 \\ 4\,524 \end{array} \\ \hline 23\,386 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ +\begin{array}{r} 32\,613 \\ 5\,820 \end{array} \\ \hline 38\,433 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\begin{array}{r} \dot{8}\,4\dot{3}2 \\ 6\,607 \end{array} \\ \hline 1\,825 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} \dot{2}\dot{3}\,\dot{0}\dot{0}7 \\ 4\,349 \end{array} \\ \hline 18\,658 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\begin{array}{r} \dot{1},\dot{0}\dot{1}\dot{2}0 \\ 0{,}8345 \end{array} \\ \hline 0{,}1775 \end{array}$$

При сложении многих слагаемых можно вычисления рационализировать. Рассмотрим такой пример:

$$\begin{array}{rccccc} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 2} & \\ & & 8 & 3 & 6 & 3 \\ & 1 & 5 & 4 & 8 & 9 \\ + & & & 8 & 8 & 1 \\ & & 2 & 6 & 1 & 7 \\ & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ & & 6 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 5 & 7 & 7 & 0 & 3 \end{array}$$

Складываем числа, как обычно, столбиками, начиная справа, но каждую колонну складываем не подряд, а группируем в ней слагаемые, составляя из них целые десятки. Начинаем с единиц. Три да семь — десять, девять да один — десять, всего двадцать, да два, да один — двадцать три. Три пишем, два помещаем над десятками; эти два да восемь — десять; шесть и четыре — тоже десять, всего двадцать да восемь, да один, да один — будет тридцать. Нуль пишем, три надписываем над сотнями. Эти три да три, да четыре — десять, восемь и два — еще десять, всего двадцать, да шесть, да один — всего двадцать семь. Семь пишем, два приписываем к тысячам. Эти два да восемь — десять, четыре да шесть еще десять — всего двадцать, да пять, да два — двадцать семь. Семь пишем, а два да один, да два дадут пять. При небольшом навыке этот «способ группировки» «или *счет на десятки*» очень облегчает сложение, позволяет выполнять его быстрее и точнее. Начинающему, чтобы не сбиться, полезно отмечать свои группировки карандашом, как это сделано в нашем примере. Более опытный счетчик обходится и без этого.

Если слагаемых много, то полезно выполнять сложение в несколько приемов, обычно в два.

Пример.

$$+\begin{array}{r} 2\,834 \\ 5\,346 \\ 18\,511 \\ 997 \\ 3\,654 \\ 16\,995 \\ 2\,218 \\ 614 \\ \hline \end{array}$$

Разбиваем слагаемые на две группы:

$$+\begin{array}{r} 2\,834 \\ 5\,346 \\ 18\,511 \\ 997 \\ \hline 27\,688 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 3\,654 \\ 16\,995 \\ 2\,218 \\ 614 \\ \hline 23\,481 \end{array}$$

Обе полученные суммы складываем:

$$+\begin{array}{r} 27\,688 \\ 23\,481 \\ \hline 51\,169 \end{array}$$

Последнее число (51 169) и будет ответом задачи.

Отметим еще сложение большого числа близких друг к другу слагаемых. В этом случае записываем не столбиком, а строчкой. Например:

$$81+83+79+85+78+80+81+77+78=?$$

Заменяем каждое слагаемое ближайшим «круглым» числом (в нашем примере 80) и подписываем у каждого его недостаток или избыток над восемьюдесятью, недостатки с минусами, избытки с плюсами; недостатки ниже, избытки — выше основной записи. Запись будет выглядеть так:

$$\overset{+1}{80}+\overset{+3}{80}+\underset{-1}{80}+\overset{+5}{80}+\underset{-2}{80}+80+\overset{+1}{80}+\underset{-3}{80}+\underset{-2}{80}=$$
$$=9\times 80+10-8=720+2=722.$$

Подсчитываем, сколько раз повторяется одинаковое число (в нашем примере 80 повторяется 9 раз), перемножаем, прибавляем числа, написанные сверху, отнимаем написанные снизу.

Сложение очень большого «столбика» мы заменили простым умножением, которое выполняется в уме.

Примеры.

83 456	510	211	56 883	33
9 633	326	215	315 922	31
+ 7 255	1 848	208	54 757	29
21 177	535	213	+ 4 143	25
2 815	984	+ 206	55 261	34
	+ 112	203	128	+ 30
	68	210		28
	1 432	217		27
	815	211		32
	2 611			30
				31

Умножение и деление на десять и степени десяти. Отрицательные степени десяти

Умножение целого числа на десять или на степень десяти сводится к приписыванию справа нужного числа нулей. Деление числа, оканчивающегося нулями, на степень десяти, сводится к зачеркиванию нужного числа нулей. Может случиться, что делитель содержит больше нулей, чем делимое. Ответ в этом случае получится в форме десятичного числа (числа с десятичной дробью). Пример: разделим 590 на 100. Отделяем две последние цифры запятой; получается 5,90, или 5,9.

При умножении и делении десятичных дробей на число, изображаемое единицей с нулями, запятая у дроби переносится на столько знаков вправо (при умножении) или влево (при делении), сколько нулей содержит число. Например,

$$0{,}0537 \times 1000 = 53{,}7; \quad 0{,}5377 : 1000 = 0{,}0005377.$$

Степени десяти часто записываются в сокращенной форме (с показателем). Можно дать простое правило для перемножения записанных таким образом степеней. Умножим, например, 10^4 на 10^5. Десять в четвертой степени — это единица с четырьмя нулями, десять в пятой степени — единица с пятью нулями; их произведение запишется как единица с девятью нулями или 10^9. Но показатели при десяти в сомножителях равны как раз числам нулей в этих сомножителях. Значит, показатель произведения (9) есть просто сумма показателей сомножителей: $10^5 \times 10^4 = 10^{5+4} = 10^9$.

Точно так же при делении степеней десяти показатель делителя вычитается из показателя делимого: например, $10^7 : 10^5 = 10^2 = 100$. Читатель сам легко проверит это с помощью подробной записи*).

Сделаем еще два замечания. Первое касается записи больших чисел в форме небольшого числа, умноженного на степень десяти. Если пользоваться десятичными дробями, то каждое число можно записать в нескольких равноправных формах. Например, население всей земли, равное 1 903 000 000 человек (данные 1930 г.), может быть записано

или так: $1903 \cdot 10^6$;
или так: $190{,}3 \cdot 10^7$;
или так: $19{,}03 \cdot 10^8$;
или так: $1{,}903 \cdot 10^9$.

Нетрудно убедиться, что все эти записи дают одно и то же число.

---

*) Читатель, знакомый с началами алгебры, узнал, конечно, обычные правила действий со степенями.

Второе замечание касается записи очень малых чисел. Для них тоже введена условная запись.

Условились писать:

вместо 0,1 10^{-1};

вместо 0,01 10^{-2};

вместо 0,001 10^{-3} и т. д., т. е. *вместо десятичной дроби, имеющей вид единицы, предшествуемой несколькими нулями, пишут* 10 *с показателем, только перед показателем ставят знак минус. Величина показателя равна числу нулей дроби, причем учитывается и нуль, стоящий перед запятой.* Например, 10^{-7} запишется подробно так: 0,0000001.

Запишем теперь в сокращенной форме (в *показательной* форме, как говорят) число 0,0007. Имеем очевидно: $0{,}0007 = 7 \times 0{,}0001 = 7 \cdot 10^{-4}$. Точно так же $0{,}00293 = 293 \times 0{,}00001 = 293 \cdot 10^{-5}$.

Мы будем употреблять как обычные показатели, так и показатели со знаком минус только для сокращения записей. В алгебре такая форма записи употребляется и для упрощения расчетов.

Примеры. $2{,}35 \times 10$; $0{,}17 \times 1000$; $243:1000$; $0{,}15:100$; $34{,}43 \times 1000$; $8:100$; $3{,}1:1000$; $11:10\,000$; $10^4 \times 10^3 = ?$ $10^3 \times 10^5 = ?$ $10^3 : 10^2 = ?$ $10^{10} : 10^3 = ?$

Следующие дроби записать в «показательной форме»:

0,03; 0,017; 0,00006; 0,0315; 0,00001617.

Следующие числа записать в форме обычных десятичных дробей:

$13 \times 10^{-5} = 13 \times 0{,}00001 = 0{,}00013$; 2×10^{-7}; $27 \cdot 10^{-6}$; $6 \cdot 10^{-4}$; $28 \cdot 10^{-3}$; $135 \cdot 10^{-10}$; $83 \cdot 10^{-12}$; $1513 \cdot 10^{-9}$.

Умножение и деление на однозначное число

При умножении многозначного числа на однозначное полезно приучить себя записывать вычисление в строку. Умножаем, как обычно, начиная с единиц многозначного числа, переходя к его десяткам, сотням и т. д. Умножим, например, 83 563 на 7. Пишем так:

$$83\,563 \times 7 = 584\,941.$$

Цифры в произведении пишем по мере того, как они получаются, лишнего ничего не записываем.

Деление на однозначное число тоже записываем строчкой. Посмотрим, как при этом рассуждают. Разделим, например, 8391 на 6. Пишем так:

$$8391:6.$$

Рассуждаем: восемь делим на шесть, получаем единицу и два в остатке (единицу записываем: $8391:6=1\ldots$); двадцать три на 6 дает 3 (трижды шесть — восемнадцать), в остатке 5 (три записываем: $8391:6=13\ldots$), пятьдесят девять на шесть — девять ($6\times 9=54$) и в остатке 5 (девять записываем); пятьдесят один на 6 дает 8 и в остатке три. Восемь пишем в частное, а остаток либо записываем отдельно, либо прибавляем к частному дробь: остаток, деленный на делитель; в нашем примере $\frac{3}{6}$ или $^1/_2$. Вся запись выглядит так:

$$8391:6=1398 \text{ (3 в остатке)}$$

или

$$8391:6=1398\frac{3}{6}=1398\frac{1}{2}.$$

Так же выполняется умножение и деление на число, состоящее из одной цифры с нулями на конце, например, на 70, 900, 0,03 и т. д. Умножаем или делим на однозначное число, а затем записываем или зачеркиваем нули, или переносим запятую.

Умножим, например, 8864 на 0,04. Пишем:

$$8864\times 0{,}04=354{,}56.$$

При умножении на четыре получим тридцать пять тысяч четыреста пятьдесят шесть. Остается отделить запятой две цифры справа.

Примеры. 5667×9; $34\,681\times 4$; 268×600; $32{,}85\times 9$; $468\times 0{,}6$; $3264:8$; $52\,119:9$; $843:5$; $126\,300:30$; $534:40$.

Умножение многозначных чисел

Принятое у нас правило умножения многозначных чисел не всегда является самым лучшим. Главное его достоинство — то, что оно действует безотказно, годится во всех без исключения случаях. Но часто можно упростить вычисления, сократить затрачиваемое на них время, если хорошо расположить действие. Запоминать все эти случаи нет надобности. Достаточно помнить два или три самых распространенных. Познакомиться с ними все же полезно.

Сделаем сначала одно общее замечание. Располагая действие, как обычно принято, пишем снизу не тот сомножитель, в котором меньше цифр, а тот, в котором сами цифры маленькие или есть одинаковые цифры. Легче, например, выполнить умножение так:

$$\begin{array}{r} \times\ \ 89 \\ 232 \\ \hline 178 \\ +\ 267 \\ 178 \\ \hline 20\,648 \end{array}$$

чем так:

$$\begin{array}{r} \times\ \ 232 \\ 89 \\ \hline 2\,088 \\ +\ 18\,56 \\ \hline 20\,648 \end{array}$$

И в первом и во втором случае приходится делать по два умножения: в первом — на 2 и на 3, во втором — на 8 и 9; но умножить на 2 и на 3 легче, чем на 8 и 9. Разумеется, если разница в числе цифр сомножителей велика, например, в одном две, а в другом шесть цифр, то при любых цифрах выгоднее меньший подписывать внизу, так как это сильно уменьшит число сложений.

Теперь перейдем к отдельным случаям. Часто множитель разбивают в уме на такие слагаемые, каждое из которых вдвое, втрое или вчетверо больше другого. Умножим, например, 564 на 175. Имеем:

$$175 = 100 + 50 + 25.$$

Умножим 564 на 100; произведение разделим пополам; то, что получится, еще раз пополам, и все три результата сложим. Вся запись выглядит так:

$$4 \times 175\ (175 = 100 + 50 + 25)$$

$$\begin{array}{r} 56\,400 \\ +\,28\,200 \\ 14\,100 \\ \hline 98\,700 \end{array}$$

Упрощается умножение и в том случае, если цифры множителя больше одна другой в два или три раза, если, например, множителем является число 248 или 312, или 214, или какое-либо иное в этом роде. Умножаем, например, 5387 на 214. Пишем, как обычно:

$$\times\begin{array}{r} 5387 \\ 214 \\ \hline \end{array}$$

Но умножать начнем не с крайней правой цифры множителя, а с его самой маленькой цифры, в нашем примере — с единицы. Так как эта единица представляет собой не простую единицу, а десяток, то пишем результат, сдвинув его на один разряд влево:

$$\times\begin{array}{r} 5387 \\ 214 \\ \hline 5387. \end{array}$$

Вместо единиц ставим точку (или нуль), чтобы не сбиться; далее наше число умножаем на две сотни и результат подписываем, сдвинув его на два разряда влево

$$\times\begin{array}{r} 5387 \\ 214 \\ \hline 5\,387. \\ 10\,774.. \end{array}$$

Остается умножить наше число (5387) на четыре. Но мы его только что удвоили. Значит, можно результат удвоения еще раз удвоить, подписав единицы того, что получится, под единицами множимого (умножаем на простые единицы). Вся запись выглядит так:

$$\begin{array}{rr}
\times & 5387\\
 & 214\\ \hline
 & 5387.\\
+ & 10\,774..\\
 & 21\,548\\ \hline
 & 1\,152\,818
\end{array}$$

Вот еще примеры:

1)
$$\begin{array}{rr}
\times & 797\\
 & 369\\ \hline
 & 239\,1..\\
+ & 47\,82.\\
 & 7\,173\\ \hline
 & 294\,093
\end{array}$$

(сначала умножаем на 3; результат умножения на 3 умножаем на 2, чтобы получить произведение на 6; результат умножения на 3 умножаем теперь на 3, чтобы получить произведение на 9).

2)
$$\begin{array}{rr}
\times & 549\\
 & 482\\ \hline
 & 1\,098\\
+ & 219\,6..\\
 & 43\,92.\\ \hline
 & 264\,618
\end{array}$$

Здесь все умножения сводятся к простым удвоениям.

Очень сильно упрощается действие в том случае, если один из сомножителей близок к числу, изображаемому единицей с нулями. Умножаем, например, 1835 на 987. Умножать на 987 громоздко: большие цифры, надо много держать в уме. Обратим теперь внимание на то, что 987 близко к 1000, именно $987 = 1000 - 13$. Умножим 1835 на 1000 (результат пишем сразу), потом умножим 1835 на 13 и из первого вычтем второе.

Все действие располагаем так:

$$1835 \times 987 \; (987 = 1000 - 13)$$

$$\begin{array}{rr} \times\begin{array}{r} 1835 \\ 13 \end{array} & 1835 \times 1000 = 1\,835\,000 \\ \hline 5\,505 & -23\,855 \\ +\;18\,35 & \overline{1\,811\,145} \\ \hline 23\,855 & \end{array}$$

Вот еще пример:

$$6893 \times 89 \; (89 = 100 - 11)$$

$$\begin{array}{rr} +\begin{array}{r} 6\,893 \\ 68\,93 \end{array} & 6\,893 \times 100 = 689\,300 \\ & -\;75\,823 \\ \hline 75\,823 & 613\,477 \end{array}$$

Деление многозначных чисел

При делении полезно обратить внимание на два случая: 1) делимое раскладывается на слагаемые, каждое из которых легко делится на делитель, и 2) делитель разлагается на множители. Рассмотрим эти случаи.

Разделим 385 на 35. Имеем $385 = 350 + 35$. Значит, $385:35 = (350 + 35):35$. Триста пятьдесят при делении на 35 даст 10, а тридцать пять при делении само на себя дает единицу. Всего получаем 11. Значит, $385:35 = 11$.

Еще пример: разделим 2837 на 14. Имеем $2837 = 2800 + 28 + 9$. Делим каждое из слагаемых на 14; получаем 200, 2 и $\frac{9}{14}$. Все полученные числа складываем: получим $202\frac{9}{14}$. Записывается действие так:

$$2837:14 = (2800 + 28 + 9):14 = \\ = 200 + 2 + \frac{9}{14} = 202\frac{9}{14}.$$

Если делим число, близкое к «круглому», легко делящемуся на делитель, то записываем делимое в виде разности двух чисел: «круглого числа» и дополнения. Дальше поступаем, как в предыдущем случае, только результаты не складываем, а вычитаем. Разделим, например, 3104 на 32. Имеем $3104=3200-96$. Делим 3200 на 32, получаем 100; делим 96 на 32, получаем 3. Вычитая 3 из 100, получим окончательный ответ: 97.

Записываем все это так:

$$3104:32=(3200-96):32=100-3=97.$$

Перейдем ко второму случаю. Разделим 4698 на 54. Делитель легко представить как произведение однозначных чисел: $54=6\times 9$. Делить на однозначные числа легко. Поэтому делим наше число на 6, а потом то, что получится, разделим на 9. Располагаем действие так:

$$4698:54=?$$
$$4698:6=783;\ 783:9=87.$$

Получается значительно проще, чем по обычному правилу деления.

Этим мы ограничимся. В остальных случаях вернее и удобнее применять обычное правило деления.

Примеры. 3468:17; 1776:48; 8557:43; 15 195:15: 2048:32; 3969:63; 2296:56; 16 665:15; 10 240:64; 10 149:51.

Вычисления с простыми и десятичными дробями

При решении практических задач часто приходится иметь дело одновременно и с простыми и с десятичными дробями. Приходится, например, выполнять действия вроде следующих:

$0{,}3+\frac{1}{5}$; $\frac{1}{8}-0{,}017$; $\frac{2}{7}\cdot 0{,}13$; $\frac{3}{5}:4{,}6$ и т. д. Заметим, что при сложении и вычитании нужно либо все дроби превратить в простые, либо все в десятичные. Удобнее считать, пользуясь десятичными дробями. Поэтому обычно все дроби переводятся в десятичные. Особенно удобно это в том случае, если ищется приближенный результат. *Если же знаменатели дробей невелики и требуется точный результат, то лучше превращать все десятичные дроби в простые, чтобы не иметь дела с периодическими дробями.*

Напомним, как обратить десятичную дробь в простую: превратим, например, 0,36 в простую дробь. Прочитываем эту дробь; имеем тридцать шесть сотых; значит, знаменателем будет 100, а числителем 36. Записываем $\frac{36}{100}$ и сокращаем насколько можно; в нашем примере можно сократить на 4. Получаем:

$$0{,}36=\frac{36}{100}=\frac{9}{25}.$$

Итак, чтобы превратить десятичную дробь в простую, прочитываем десятичную дробь и записываем ее в форме простой дроби так, как читаем; затем, что можно — сокращаем.

Если нужно превратить простую дробь в десятичную, то *делим числитель на знаменатель по обычным правилам*. Деление целых чисел или обрывается, и мы получаем точный ответ, или (чаще всего) продолжается без конца. В последнем случае обязательно получается *периодическая* дробь. Число членов ее периода не превосходит величины знаменателя минус единица. Если при делении получается периодическая дробь, то приходится довольствоваться приближенным результатом.

Примеры: 1) Превратить $\frac{5}{32}$ в десятичную дробь. Делим 5 на 32.

$$\begin{array}{r|l}
-\,50 & 32 \\
32 & \overline{0{,}15625} \\
\hline
-\,180 & \\
160 & \\
\hline
-\,200 & \\
192 & \\
\hline
-\,80 & \\
64 & \\
\hline
-\,160 & \\
160 & \\
\hline
= &
\end{array}$$

Получим 0,15625.

2) Превратить $\frac{3}{7}$ в десятичную дробь. Делим 3 на 7:

$$\begin{array}{l|l}
\underline{-\begin{array}{r}30\\28\end{array}} & \underline{7\qquad\qquad} \\
\quad\underline{-\begin{array}{r}20\\14\end{array}} & 0{,}4285714\ldots \\
\qquad\underline{-\begin{array}{r}60\\56\end{array}} & \\
\qquad\quad\underline{-\begin{array}{r}40\\35\end{array}} & \\
\qquad\qquad\underline{-\begin{array}{r}50\\49\end{array}} & \\
\qquad\qquad\quad\underline{-\begin{array}{r}10\\7\end{array}} & \\
\qquad\qquad\qquad 30 & \\
\qquad\qquad\qquad \ldots & \\
\qquad\qquad\qquad \ldots &
\end{array}$$

Деление никогда не закончится. Получится периодическая дробь 0,428571428571428571... Число членов периода равно шести и действительно не превосходит величины делителя минус единица ($7-1=6$). Эту периодическую дробь записывают так: 0,(428571), т. е. пишут только первый период, но заключают его в скобки.

Примеры. Превратить в простые дроби: 0,72; 0,0128; 0,625; 0,17; 0,3; 0,2.

Превратить в десятичные дроби:

$$\frac{1}{5};\ \frac{1}{8};\ \frac{3}{4};$$

$$\frac{1}{40};\ \frac{3}{80};\ \frac{9}{16};\ \frac{7}{32};\ \frac{11}{160};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9}.$$

Если нужно сложить или вычесть дроби, среди которых есть и простые с небольшими знаменателями и десятичные, то превращаем все дроби в простые и выполняем действие по обычным правилам.

Примеры.

1) $$0{,}42+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+0{,}016=$$
$$=\frac{42}{100}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{16}{1000}=$$
$$=\frac{21}{50}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{125}=$$
$$=\frac{21}{50}^{\overset{15}{\smile}}+\frac{1}{3}^{\overset{250}{\smile}}+\frac{2}{5}^{\overset{150}{\smile}}+\frac{2}{125}^{\overset{6}{\smile}}=$$
$$=\frac{315+250+300+12}{750}=\frac{877}{750}=1\frac{127}{750}.$$

Общий знаменатель 750. Дополнительные множители 15, 250, 150 и 6.

2) $$\frac{4}{7}-0{,}48=\frac{4}{7}-\frac{48}{100}=\frac{4}{7}^{\overset{25}{\smile}}-\frac{12}{25}^{\overset{7}{\smile}}=\frac{100-84}{175}=\frac{16}{175}.$$

3) $$0{,}096-\frac{1}{11}=\frac{96}{1000}-\frac{1}{11}=\frac{12}{125}-\frac{1}{11}=$$
$$=\frac{132-125}{1375}=\frac{7}{1375}.$$

Примеры.

$$\frac{2}{3}-0{,}64;\ \frac{5}{7}+0{,}15+\frac{1}{3};\ 0{,}175-\frac{1}{9};$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+0{,}03+0{,}55;\ \frac{3}{4}-0{,}65;\ 0{,}45-\frac{3}{11}.$$

Для *умножения* и *деления простых дробей* не нужно помнить все правила умножения и деления дроби на дробь, дроби на целое число, десятичной дроби на простую и т. д. Важно твердо помнить правило умножения и правило деления дроби на дробь.

Правило умножения дроби на дробь: *перемножаем числители дробей — это будет числитель произведения; перемножаем знаменатели дробей — это будет знаменатель произведения.*

Например,

$$\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{2\times3}{7\times5}=\frac{6}{35}.$$

Чтобы разделить одну дробь на другую, надо первую дробь умножить на перевернутую вторую.

Например,

$$\frac{2}{7}:\frac{3}{5}=\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{2\times5}{7\times3}=\frac{10}{21}.$$

При умножении и делении нет надобности сводить все данные дроби либо только к простым, либо только к десятичным. Действуем с десятичными дробями по тем же правилам, как и с целыми числами. Если сомножитель, делимое или делитель, будет целым числом или десятичной дробью, то подписываем под ним в качестве знаменателя единицу (от этого число, разумеется, не меняется) и пользуемся правилами для умножения или деления дробей.

Умножим, например, 4,5 на $\frac{2}{15}$. Пишем:

$$4{,}5\times\frac{2}{15}=\frac{4{,}5}{1}\times\frac{2}{15}=\frac{4{,}5\times2}{1\times15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

Здесь нет никакой надобности превращать 4,5 в простую дробь или $\frac{2}{15}$ — в десятичную.

Разделим, далее, $\frac{21}{4}$ на 17,5. Пишем:

$$\frac{21}{4}:17{,}5=\frac{21}{4}:\frac{17{,}5}{1}=\frac{21}{4\times17{,}5}=0{,}3.$$

Примеры на умножение.

$$0{,}24\times\frac{5}{6};\quad 0{,}72\times\frac{15}{8};\quad \frac{5}{7}\times0{,}056;$$

$$\frac{3}{7}\times0{,}18;\quad 0{,}311\times\frac{2}{5};\quad 0{,}14\times\frac{2}{3};\quad \frac{5}{6}\times0{,}11.$$

(В последних четырех примерах действие идет не так гладко, как в первых трех. Умножим, например, $\frac{3}{7}$ на

0,18; получим $\frac{3}{7}\times 0{,}18=\frac{0{,}54}{7}$. Сократить ничего нельзя, делить десятичную дробь на 7 — это обрекать себя на бесконечное деление. Поэтому умножаем числитель и знаменатель на 100 — чтобы устранить десятичную дробь в числителе — и получаем $\frac{54}{700}$, а по сокращении на 2 — окончательный ответ: $\frac{27}{350}$.)

Примеры на деление.

$$0{,}85:\frac{17}{20};\ \frac{5}{11}:0{,}4;\ \frac{3}{7}:0{,}03;\ \frac{6}{5}:0{,}18;\ 0{,}1:\frac{4}{3};$$
$$0{,}08:\frac{2}{5};\ \ 0{,}17:\frac{7}{11};\ 2\frac{3}{4}:0{,}15.$$

(В последнем примере сначала превратить целое число с дробью, т. е. $2\frac{3}{4}$, в неправильную дробь. Два даст $\frac{2\times 4}{4}$, всего восемь четвертых, да 3 четвертых — одиннадцать четвертых.)

Если нужно перемножить несколько дробей, то сначала выписываем над чертой все числители, а под чертой — все знаменатели. Затем все, что можно, сокращаем. И только после этого перемножаем числа, стоящие над чертой (это будет числитель), *и числа, стоящие под чертой* (знаменатель).

Вычислим, например, $\frac{3}{4}\times 0{,}25\times\frac{8}{17}\times\frac{3}{5}\times 0{,}034$. Записываем так:

$$\frac{3}{4}\times 0{,}25\times\frac{8}{17}\times\frac{3}{5}\times 0{,}034=\frac{3\times 0{,}25\times 8\times 3\times 0{,}034}{4\times 17\times 5}=$$
(сокращаем 8 и 4; 0,25 и 5; 0,034 и 17)
$$=\frac{3\times 0{,}05\times 2\times 3\times 0{,}002}{1\times 1\times 1}=0{,}9\times 0{,}002=0{,}0018.$$

Вот еще пример: перемножим $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{11}$, 0,121, $\frac{1}{9}$ 0,15.

Пишем:

$$\frac{1}{3}\times\frac{7}{8}\times\frac{5}{11}\times 0,121\times\frac{1}{9}\times 0,15=$$

$$=\frac{7\times 5\times 0,121\times 0,15}{3\times 8\times 11\times 9}=$$

(сокращаем 0,121 и 11; 0,15 и 3)

$$=\frac{7\times 5\times 0,011\times 0,05}{8\times 9}=\frac{35\times 0,00055}{72}=\frac{0,01925}{72}=$$

$$=\frac{1\,925}{7\,200\,000}=\frac{77}{288\,000}.$$

Примеры.

$$\frac{3}{5}\times\frac{8}{7}\times 0,11\times\frac{5}{9}\times 0,196;$$

$$\frac{2}{3}\times 0,075\times\frac{17}{5}\times\frac{7}{2}\times\frac{1}{5};$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{11}\times 0,033\times 0,35;$$

$$0,18\times\frac{2}{9}\times\frac{4}{5}\times 0,1\times 4\frac{8}{11}.$$

(В последнем примере превратить сначала целое число с дробью в неправильную дробь.)

Процентные вычисления

В первой главе мы рассмотрели основные задачи на проценты. Если данные нам числа не так просты, как это было в примерах первой главы, то задачу приходится решать на бумаге. Для процентных вычислений на бумаге выгодно раз навсегда научиться обозначать неизвестную величину буквой x, составлять для заданной задачи уравнение и решать его методами алгебры. При алгебраическом решении нет надобности различать три типа задач на проценты, как это мы делали в первой главе. Они сливаются в один тип и решаются единым методом.

Вот некоторые сведения из арифметики и алгебры, которые нам потребуются.

1) Обозначение частного (деления) с помощью черты. Оно нам уже знакомо. Если мы хотим записать частное от деления 5 на 7, то можем это сделать не только с помощью двоеточия, т. е. написать $5:7$, но и с помощью черты, написав $\frac{5}{7}$. Точно так же 3,14, деленное на 1,7, можно записать в виде $\frac{3,14}{1,7}$.

2) Правила обращения с равными дробями. Пусть нам даны две равные дроби, например $\frac{5}{7}$ и $\frac{15}{21}$:

$$\frac{5}{7}=\frac{15}{21}.$$

В таком случае равенство не нарушится, если мы «перенесем» знаменатель первой дроби в числитель второй. Получится равенство

$$5=\frac{7\cdot 15}{21}.$$

Можно было также «перенести» числитель первой дроби в знаменатель второй, но при этом вместо «перенесенного» числителя нужно оставлять единицу:

$$\frac{1}{7}=\frac{15}{5\cdot 21}.$$

Эти мнемонические правила перенесения крест-накрест легко запоминаются, и тому, кто хочет быстро считать, нужно твердо знать их.

3) Неизвестную величину можно обозначить буквой x и действовать в дальнейшем с этой буквой, как с обычным числом.

В каждой задаче на проценты фактически участвуют четыре величины. Три из них бывают заданы, а четвертую нужно найти.

Для решения задачи нужно обозначить неизвестную величину буквой x и написать равенство: частное от деления одного числа на соответствующий ему процент равно частному от деления другого числа на соответствующий ему процент. После этого, пользуясь правилами перене-

сения крест-накрест, приводим это равенство к такому виду, что с одной стороны равенства стоит величина x, а с другой—выражение из известных чисел. Вычислив (упростив) это выражение, мы получим величину x.

Найдем, например, 23% от 845. Рассуждаем так: неизвестное число x, деленное на соответствующий ему процент 23, равно числу 845, деленному на соответствующий ему процент 100. В записи это выглядит так:

$$\frac{x}{23}=\frac{845}{100}.$$

Переносим знаменатель 23 и вычисляем получившееся выражение:

$$x=\frac{23\cdot 845}{100}=\frac{20\cdot 845+3\cdot 845}{100}=\frac{845}{5}+3\cdot 8{,}45=$$
$$=169+25{,}35=194{,}35.$$

Рассмотрим еще пример. Какой процент от 275 составляет 15? Рассуждаем так: частное от деления 15 на неизвестный процент x равно частному от деления 275 на соответствующий ему процент 100. В записи

$$\frac{15}{x}=\frac{275}{100}.$$

Буква x оказалась в знаменателе. Поэтому придется «перенести» три числа: x, 275 и 100. Получаем:

$$\frac{15\cdot 100}{275}=x$$

и вычисляем:

$$x=\frac{15\cdot 100}{275}=\frac{1500}{275}=\frac{60}{11}=5\frac{5}{11}\%$$

(переходя от второй дроби к третьей, мы сократили на 25).

Вот еще пример. 72% от неизвестного числа составляют 15. Найти само число. Пишем (обозначая неизвестное число через x):

$$\frac{x}{100}=\frac{15}{72},\quad x=\frac{15\cdot 100}{72}=\frac{1500}{72}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}.$$

Рассмотрим задачи на проценты, которые несколько отличаются от разобранных.

Задача 1-я. Сберегательная касса платит по срочным вкладам 3%. Я положил некоторую сумму денег и через год получил 1751 рубль. Какая сумма была положена?

Необычность задачи в том, что дается не сама величина и не ее доля, составляющая данный процент, а сумма самой величины и ее доли. Тем не менее простое рассуждение покажет, что перед нами — обычная задача.

В самом деле, имелась некоторая сумма x, составлявшая 100%, да к ней прибавилось 3%. Значит, новая сумма 1751 составляет $100+3=103\%$. Дальше просто

$$\frac{x}{100}=\frac{1751}{103},\quad x=\frac{1751\cdot 100}{103}=1700 \text{ руб.}$$

Задача 2-я. Забраковав 4% продукции, браковщик принял 2592 детали. Сколько всего было изготовлено деталей?

Рассуждение такое же, как и в предыдущей задаче. Из всей продукции x, составляющей 100%, осталось $100-4=96\%$. Дальше просто

$$\frac{x}{100}=\frac{2592}{96},\quad x=\frac{2592\cdot 100}{96}=27\cdot 100=2700 \text{ деталей}$$

(при вычислении сократить на $96=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$).

Задача 3-я. Население города было 44 000, стало 48 000 человек. На сколько процентов выросло население города?

Прежде всего находим, на сколько человек выросло население города: $48\,000-44\,000=4000$. Остается найти: какой процент составляет 4000 от 44 000 (первоначального числа). Находим:

$$\frac{4000}{x}=\frac{44\,000}{100},\quad x=\frac{4000\cdot 100}{44\,000}=9\frac{1}{11}\%.$$

Значит, население города увеличилось на $9\frac{1}{11}\%$.

Задача 4-я. Рабочий, выполнив норму на 420%, обработал 4620 деталей. Сколько деталей обработал он сверх нормы?

Несмотря на необычность постановки вопроса, — это обычная задача на проценты. Только «доля» здесь значительно больше самого числа, но это не влияет на ход рассуждений. Рассуждаем так: 4620 деталей составляют 420%, а x деталей составляют 320%. Следовательно,

$$\frac{4620}{420}=\frac{x}{320}, \quad x=\frac{4620\cdot 320}{420}=3520 \text{ деталей.}$$

Задача 5-я. Я хочу купить бумаги на 100 руб. Один лист бумаги стоит 80 коп., и я могу покупать со скидкой в 20%. Сколько листов я могу купить?

Рассуждаем так. Узнаем сначала, сколько мне будет стоить один лист. Я уплачу за него не 80 коп., а только 80% от этого числа (100 — 20 = 80), т. е.

$$\frac{80\cdot 80}{100}=64 \text{ копейки}$$

$\left(\text{из равенства } \frac{x}{80\%}=\frac{80\,\text{коп.}}{100\%}\right)$.

Значит, на 100 руб. (= 10 000 коп.) я могу купить:

$$\frac{10\,000}{64}=156\frac{16}{64}=156\frac{1}{4} \text{ листа.}$$

Или, так как части листов не продаются, я могу купить 156 листов, и у меня еще останется 16 коп. (стоимость $\frac{1}{4}$ листа).

Продавец, если я попрошу его отпустить мне 156 листов, будет считать немного иначе. Он будет считать так: 156 листов по 80 копеек стоит:

$$156\times 80=12\,480 \text{ коп.} = 124 \text{ р. } 80 \text{ коп.}$$

С каждой сотни рублей делается скидка в 20 руб. С 24 р. 80 коп. скидка округляется. Эта сумма принимается за 25 р. и 20% от 25 р. составляют 5 рублей. Значит, скидка равна 25 рублям, и я уплачу:

$$124 \text{ р. } 80 \text{ коп.} - 25 \text{ руб.} = 99 \text{ р. } 80 \text{ коп.},$$

т. е. получу не 16, а 20 копеек сдачи.

Подведем итоги. *Имея задачу на проценты, прежде всего приводим ее к такому виду, в котором фигурируют четыре величины: два числа и два соответствующих им процента.* При этом не обращаем внимания на то, какая из величин, или процент, оказывается неизвестным. Не следует также смущаться, если «доля» оказывается больше самой величины. *После этого обозначаем неизвестную величину буквой x и составляем равенство дробей. Равенство «решаем», делая нужные переносы «крестом», и вычисляем x.*

В заключение еще раз отметим, что задачи на проценты (с точностью до 1%) удобнее и быстрее всего решать на логарифмической линейке. Выучиться считать на логарифмической линейке очень легко — для этого не требуется сведений, выходящих за пределы программы начальной школы. Если приходится часто решать задачи на проценты (с точностью до 1%), то нужно решать их на логарифмической линейке.

ГЛАВА III

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Точные и приближенные значения величин

При счете каких-нибудь предметов обычно нам удается точно узнать их число. Если я говорю, что у меня на руке пять пальцев или что рабочий изготовил 320 втулок, то числа 5 и 320 *точно выражают количество сосчитанных предметов*. Иначе обстоит дело, когда мы говорим, что в 1939 г. в городе Рыбинске было 55 500 жителей. Ведь жители рождаются и умирают, приезжают и уезжают; число их все время меняется. Да если бы оно и не менялось, все равно подсчитать всех до единого жителей города очень трудно: одних можно случайно пропустить, других сосчитать дважды. Ошибка при счете на 2—3 десятка вполне возможна. Значит, когда мы говорим, что в Рыбинске было 55 500 жителей, мы имеем в виду, что их было около 55 500; может быть, 55 550, может быть, 55 472, может быть, еще какое-нибудь число, близкое к 55 500. В этом случае 55 500 даст нам приближенное число жителей города.

Все же счет, как правило, дает точные значения чисел и лишь в редких случаях приближенные. Иначе обстоит дело при измерении или взвешивании различных предметов. Если нам отвесили 800 *г* хлеба, то это вовсе не значит, что наш хлеб весит ровно 800 *г*. Ведь торговые весы — инструмент грубый; если мы, уравновесив на чашках 800 *г*, добавим на одну из чашек 5 *г* (это — очень маленькая гирька; ее придется взять из аптекарского разновеса; в продуктовых магазинах таких мелких гирь обычно не бывает), то равновесие не нарушится.

Значит, наш хлеб может весить и 805 и 810 *г*, а может и 793 или 798 *г*. Число 800 *г* выражает его вес *приближенно*.

Очень поучителен следующий опыт. Несколько человек измеряют один и тот же предмет, например ширину стола. При этом почти наверное у всех получатся несколько отличающиеся одно от другого числа. Один получит, например, 883 *мм*, другой 885 *мм*, третий 881 *мм* и т. д. Приняв ширину стола в 883 *мм*, мы получим, как и в предыдущем примере, *приближенное* значение этой ширины.

Все без исключения измерения приводят к приближенным значениям измеряемых величин. Но в некоторых случаях измерения проводятся очень грубо — тогда получаются большие ошибки. В других случаях приходится делать тщательные измерения: тогда и ошибка получается малая. *Полная точность при измерениях не достигается никогда.*

Раз мы сознаем, что все наши измерения несовершенны, то, естественно, возникают такие вопросы: как охарактеризовать качество измерения, степень его точности? Как производить арифметические действия с числами, выражающими интересующие нас величины только приближенно? Не будет ли увеличиваться ошибка, если мы над приближенной величиной будем совершать арифметические действия? Нельзя ли, пользуясь тем, что сами данные приблизительны и ответ нас интересует приближенный, упростить арифметические действия?

Особенно важен последний вопрос — вопрос об упрощении арифметических действий при работе с приближенными значениями измеряемых величин. К нему можно подойти с другой стороны. Когда изготовляется по стандарту или по чертежу какой-нибудь предмет, то допускается известное отклонение от указанных на чертеже размеров, иногда — довольно значительное, иногда — весьма малое. Например, для круглого железа обычной прокатки диаметром в 20 *мм* допускаются уклонения на $^1/_2$ *мм* в ту и другую сторону. В случае очень точной прокатки отклонение допускается только в 0,3 *мм*. Если изготовление предмета по чертежу связано с предварительным расчетом (например, нужно подсчитать, какой подобрать резец и т. п.), а результат можно получить приближенный, то можно ожидать, что и сами вычисления можно выполнять как-то упрощенно, но нужно следить за тем, чтобы ошибка при вычислениях не превзошла указанного допуска.

На все вопросы такого рода отвечает особый отдел математики, который называется *учением о приближенных вычислениях*. Наша задача — познакомиться с началами этого учения.

Абсолютная и процентная погрешность

Допустим, что ширина стола точно 784 *мм*, а мы, измерив ее, получили 781 *мм*. *Разница между точным значением измеряемой величины и ее приближенным значением называется абсолютной погрешностью.* Мы скажем, что найденное нами приближенное значение измеряемой величины имеет абсолютную погрешность 3 *мм*. *На практике мы никогда* не знаем точного значения измеряемой величины, поэтому *не можем точно знать абсолютную погрешность*. Но обычно мы знаем точность приборов, с которыми мы работаем, учитываем ловкость или неловкость лица, производящего измерения, и т. д. Все это дает возможность составить известное суждение об абсолютной погрешности измерения, именно сказать, что абсолютная погрешность данного измерения не превосходит определенной величины.

Если, например, мы обычной линейкой или рулеткой измеряем длину комнаты, то нам нетрудно будет учесть метры и сантиметры, но вряд ли мы сможем учесть миллиметры. Да в этом и надобности нет. Поэтому мы сознательно допускаем ошибку в пределах одного сантиметра. Абсолютная погрешность нашего приближенного значения длины комнаты будет меньше одного сантиметра. Точно так же при взвешивании на торговых весах грузов, близких к килограмму, вполне возможно ошибиться на несколько граммов, но заведомо нельзя ошибиться на десять или большее число граммов. Купив, например, 800 *г* хлеба, мы сможем сказать, что 800 *г* — это приближенный вес нашего хлеба с абсолютной погрешностью, меньшей 10 *г*.

Абсолютная погрешность не является полным показателем того, хорошо или плохо произведено измерение. Если известно, что, измерив некоторую длину, мы получили абсолютную погрешность в 1 *см*, то никаких заключений о том, хорошо или плохо мы мерили, сделать нельзя. Если мы измеряли длину карандаша в 15 *см* и ошиблись на один сантиметр, то наше измерение никуда не годится. Если же мы измеряли двадцатиметровый коридор и ошиблись всего на 1 *см*, то наше измерение — образец точности. *Важна не только сама абсолютная погрешность, но и та доля, которую она составляет от измеряемой величины.* В первом примере абсолютная погрешность (1 *см*) составляет $\frac{1}{15}$ измеряемой величины (15 *см*), во втором — $\frac{1}{2000}$ (20 *м* составляют 2000 *см*).

Обычно эти доли выражают в процентах. В первом примере абсолютная погрешность составляет $\frac{1\times 100}{15}=6\frac{2}{3}\%$ измеряемой величины, во втором — $\frac{1\times 100}{2000}=\frac{1}{20}\%$. Сразу видно, что второе измерение значительно лучше первого.

Выраженная в процентах доля, которую абсолютная погрешность составляет от всей измеряемой величины, называется процентной погрешностью. Качество всякого измерения характеризуется процентной погрешностью приближенного результата.

Легко дать правило для определения процентной погрешности. *Нужно абсолютную погрешность умножить на* 100 *и разделить на саму измеряемую величину* (*или на ее приближенное значение* *)).

Примеры. При измерении длины в 5 *м* допущена абсолютная погрешность в 25 *см*. Найти процентную погрешность.

*) При этом получатся различные числа, но близкие друг к другу. Практически все равно, которое из них считать процентной погрешностью.

Ищем, какой процент 25 *см* составляют от 500 *см* (5 *м* = 500 *см*). Получаем: $\frac{25 \times 100}{500} = 5\%$. Это и будет процентная погрешность.

При взвешивании 800 *г* допущена неточность в 10 *г*. Найти процентную погрешность.

При подсчете числа жителей города, которое оказалось равным 55 000, допущена погрешность в 40 человек. Найти процентную погрешность.

При прокате круглого железа диаметром в 30 *мм* допускается неточность в 3% (процентная погрешность). На сколько миллиметров можно ошибиться при прокате этого железа, не делая брака?

Некоторые особенности записи приближенных чисел. Число верных знаков после запятой

Результат всякого измерения выражается числом, лишь приблизительно характеризующим измеряемую величину. Такими же числами являются исходные данные всех технических расчетов. Поэтому часто говорят, что техника имеет дело с *приближенными числами*. Приближенные числа обычно даются в форме десятичных дробей. При этом последняя правая цифра характеризует величину абсолютной погрешности. Если в приближенных вычислениях мы имеем дело с числом 12,45, то это не значит, что величина, характеризуемая этим числом, не содержит тысячных долей. Можно только утверждать, что тысячные доли при измерении не учитывались; следовательно, абсолютная погрешность меньше одной сотой. Точно так же относительно приближенного числа 1,283 мы скажем, что абсолютная погрешность меньше одной тысячной. *Приближенные числа принято записывать так, чтобы абсолютная погрешность не превышала единицы последнего десятичного разряда.* Эту мысль выражают иногда иначе, именно говорят: *абсолютная погрешность приближенного числа характеризуется числом десятичных знаков после запятой* (один знак после запятой — абсолютная погрешность не превосходит одной десятой, два знака — одной сотой и т. д.).

Как же быть, если при тщательном измерении какой-нибудь величины получится, что она содержит целую единицу, две десятых, пять сотых, не содержит тысячных, а десятитысячные не поддаются учету? Записать так: 1,25 нельзя — это будет означать, что тысячные не учтены, тогда как на самом деле мы уверены, что их нет. В этом случае принято ставить на месте тысячных нуль: 1,250. Таким образом, в учении о приближенных вычислениях числа 1,25 и 1,250 обозначают далеко не одно и то же. Первое число содержит тысячные; мы только не знаем, сколько именно. Второе — тысячных не содержит, сомнение вызывают только десятитысячные.

Некоторые трудности возникают при приближенной записи больших чисел. Пусть число жителей села — *равно* 2000 человек, а в большом городе — *приблизительно* 457 000 жителей, причем относительно города мы ручаемся за тысячи, но допускаем, что ошиблись в счете сотен и тем более — десятков и единиц. Как в самой записи отразить разницу между точным числом (в нашем примере 2000) и приближенным (457 000)? Ведь нули на конце первого и на конце второго числа имеют разное значение: в первом случае они показывают на отсутствие сотен, десятков и единиц, во втором — на наше *незнание* числа сотен, десятков и единиц. Из этого затруднения выходят по-разному. Иногда неизвестные цифры приближенного числа заменяют маленькими нуликами (пишут 457000 вместо 457 000); иногда пишут только верные цифры, а нули заменяют множителем, имеющим вид степени десяти: пишут $457 \cdot 10^3$ вместо 457 000. Мы будем придерживаться второго способа записи.

Относительно числа 28 300 будем утверждать, что нам точно известно отсутствие десятков и единиц, а относительно числа $32 \cdot 10^4$ — что ни о тысячах, ни о сотнях, ни о десятках, ни о единицах мы ничего не знаем; известно только, что число содержит 32 десятка тысяч, т. е. что оно близко к 320 000.

Если мы ручаемся за сотни, но сомневаемся в десятках некоторого числа, то скажем, что число дано *с точностью до сотен*. Точно так же, ручаясь за тысячные доли, но сомневаясь в десятитысячных, скажем, что число дано с точностью до тысячных. Таким образом, мы можем одну и ту же мысль выразить тремя способами: про число 33,13 мы можем сказать, что оно

дано с точностью до сотых;

дано с двумя знаками после запятой;

дано с абсолютной погрешностью, меньшей 0,01.

Число верных цифр и его связь с процентной погрешностью

Число знаков после запятой или, лучше сказать, последний верный разряд — все это связано с абсолютной погрешностью, а на практике особенно важна процентная погрешность.

Посмотрим теперь, чем в записи приближенного числа характеризуется процентная погрешность.

Сравним точность двух приближенных чисел, например, 1362,3 и 2,37. В первом абсолютная погрешность не больше одной десятой, во втором — она не превосходит одной сотой. Поэтому второе число выглядит более точным, чем первое.

Подсчитаем процентную погрешность. В первом случае абсолютная погрешность меньше 0,1. Значит, процентная погрешность меньше $\frac{0,1 \times 100}{1362,3}$; значит, она и подавно меньше $\frac{0,1 \times 100}{1000}$ (уменьшив знаменатель, мы увеличиваем дробь).

Итак, в первом случае процентная погрешность меньше, чем $\frac{0,1 \times 100}{1000} = 0,01\%$. Во втором случае абсолютная погрешность меньше 0,01, значит, процентная — меньше $\frac{0,01 \times 100}{2,37}$, т. е. подавно меньше $\frac{0,01 \times 100}{1} = 1\%$. Мы видим, что второе число значительно менее точно, чем первое; первое в 100 раз точнее. Получается это потому, что в первом числе дано целых пять верных цифр, тогда как во втором — только три.

Все цифры приближенного числа, в которых мы уверены, будем называть верными цифрами независимо от их положения.

Например, каждое из следующих пяти чисел имеет три верные цифры: $283 \cdot 10^5$; $200 \cdot 10^2$; 22,5; 0,0811; 2,10.

Существует следующее правило: *если число верных цифр больше или равно трем, то процентная погрешность меньше единицы, деленной на единицу со столькими нулями, сколько в приближенном числе верных цифр без трех. Если же в приближенном числе две верные цифры, то процентная погрешность меньше* 10%. (Если дана одна верная цифра, то процентная погрешность может достигать нескольких десятков процентов; этот случай для практики не представляет интереса.) Например, процентная погрешность числа $2800 \cdot 10^2$ не превосходит $\frac{1}{10}\%$ (четыре верные цифры, значит, к единице приписываем один нуль), процентная погрешность числа 0,0028365 не превосходит $\frac{1}{100}\%$, процентная погрешность числа 2,8 не превосходит 10%. Особенно важен случай, когда допустима процентная погрешность до 1%; большинство технических расчетов проводится именно с этой степенью точности. Эту степень точности дает в производственной обстановке счетная линейка *). *В этом случае приближенные числа должны иметь три верные цифры.* В дальнейшем мы обратим особенное внимание на действия над приближенными числами, имеющими три верные цифры.

Примеры. Оценить процентную погрешность следующих приближенных чисел: 0,818; 2,410; $56 \cdot 10^5$; 32,200; 0,00012; 843,356.

Действия над приближенными числами. Округление

При вычислениях с приближенными числами возникают два вопроса: первый — как, имея данные приближенные числа, получить ответ с наибольшей возможной точностью и второй — какую точность должны иметь

*) Хороший счетчик на хорошей линейке может считать с точностью до $0,1\%$.

исходные данные, чтобы ответ получился с наперед указанной точностью. Каждый из этих вопросов может ставиться применительно к абсолютной и относительной погрешности. Таким образом, возникают четыре задачи, которыми занимается теория приближенных вычислений. Нас будет интересовать только один вопрос: *как, исходя из данных приближенных чисел, получить ответ с нужной нам относительной погрешностью,* затратив при этом наименьшие усилия. Мы увидим, что часто при этом все исходные данные приходится брать с одной и той же погрешностью, именно погрешностью наименее точного из данных чисел. Поэтому часто приходится более точное число сознательно заменять менее точным. Такая замена называется *округлением приближенного числа.* Если нам дано, например, приближенное число 27,136, а нам нужна точность до десятых, то мы «округлим» наше число, отбросив сотые и тысячные доли. Напишем: $27{,}136 \approx 27{,}1$ (знак $\approx$ означает приближенное равенство). Если нужно округлить 32,8 до целых единиц, то невыгодно просто отбросить десятые доли. Ошибка будет в восемь десятых; если же мы, отбросив десятые, увеличим цифру единиц на 1, т. е. напишем $32{,}8 \approx 33$, то ошибка будет всего в две десятых. Поэтому введено такое правило («правило округления»). *Если крайняя левая из отбрасываемых при округлении цифр меньше пяти, то последнюю сохраняемую цифру не изменяют; если крайняя левая цифра (из отбрасываемых) больше пяти или если она равна пяти, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на единицу* *).

Обращаем внимание на одно обстоятельство, которое часто затрудняет неопытного счетчика. Округлим до сотых 10,297. Отбрасывая семерку, мы должны цифру

---

*) Нетрудно сообразить, что если отбрасывается одна пятерка, то ошибка получится одна и та же, прибавим ли мы или нет единицу к последней сохраняемой цифре (например, написав вместо 38,5 в одном случае 38, в другом 39, получим одну и ту же ошибку 0,5). Однако, чтобы получать всегда один и тот же результат, нужно придерживаться одного и того же правила. Правило, изложенное в тексте, удобно тем, что его легче выполнять на счетных машинах механически.

сотых увеличить на единицу. Но в нашем примере и без того имеется 9 сотых. В этом случае на месте сотых ставим нуль, а цифру десятых увеличиваем на единицу. Получим 10,30. Точно так же (округляем до десятых): $17{,}96 \approx 18{,}0$. Может случиться, что и вторая по очереди цифра даст при округлении десять, тогда переходим к следующей. Например (округляем до сотых) — $28{,}998 \approx 30{,}00$.

Примеры (округляем везде до сотых долей). $10{,}237 \approx 10{,}24$; $2{,}2312 \approx 2{,}23$; $0{,}9852 \approx 0{,}99$; $0{,}985 \approx 0{,}99$; $0{,}315 \approx 0{,}32$.

Примеры. Округлить до тысячных долей: 0,02836; 0,3385; 0,06253; 1,1335; 0,8339.

Округлить, сохранив три верные цифры: 43,51; 285,51; 0,06835; 481,1; 61,45; 24 832 (в этом примере нужно сохранить первые три цифры; нельзя, разумеется, просто написать 248, нельзя написать и 24 800, так как эта запись покажет, что за отсутствие десятков и единиц мы ручаемся; следует написать $249 \cdot 10^2$); 36,18; 2555.

В предыдущей главе мы встречались с расчетами, в которых приходилось иметь дело сразу и с простыми и с десятичными дробями. На практике обычно простые дроби заменяют десятичными, причем все десятичные дроби берут с некоторым приближением. Превратим, например, $\frac{1}{32}$ в десятичную дробь, ограничиваясь точностью до тысячных долей. Делим 1 на 32:

$$\begin{array}{r|l} 100 & 32 \\ \underline{96} & \overline{0{,}031} \\ 40 & \\ \underline{32} & \\ 8 & \end{array} \qquad \text{Получаем } \frac{1}{32} \approx 0{,}031.$$

Примеры. Превратить данные ниже простые дроби в десятичные, ограничиваясь точностью до тысячных долей:

$$\frac{1}{3};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{7};\ \frac{3}{7};\ \frac{7}{12};\ \frac{11}{13};\ \frac{17}{112};\ \frac{4}{9};\ \frac{5}{11};\ \frac{41}{115}.$$

Сложение и вычитание приближенных чисел

Рассмотрим задачу: сложить приближенные числа: 2,369; 17,2; 8,65 и 94,12. Напишем их обычным столбиком, но прежде чем начать складывать, немного подумаем:

$$\begin{array}{rr} & 2{,}369 \\ & 17{,}2.. \\ + & 8{,}65. \\ & 94{,}12. \\ \hline \end{array}$$

Верхнее слагаемое содержит 9 тысячных долей. С чем их складывать? Ведь остальные слагаемые тоже содержат какие-то тысячные доли, хотя и не известные нам (на месте этих неизвестных цифр стоят точки). Точно так же, складывая сотые доли, мы не можем подсчитать их точно, потому что нам не известно, сколько сотых у второго слагаемого. Десятые же доли даны у всех слагаемых, и их мы можем подсчитать. Поэтому все, что правее десятых, отделяем чертой и зачеркиваем, а десятые округляем обычным порядком. Некоторые цифры при этом надо было бы увеличить на единицу. За неимением места мы отмечаем это точкой над цифрой, которую надо увеличить. После этого складываем, принимая во внимание точки над цифрами:

$$\begin{array}{rr|l} & 2{,}\dot{3} & \cancel{6}\cancel{9} \\ + & 17{,}2 & .. \\ & 8{,}\dot{6} & \cancel{5}. \\ & 94{,}1 & \cancel{2}. \\ \hline & 122{,}4 & \end{array}$$

Получилось 122,4.

Итак, *при сложении приближенных чисел сохраняем справа только те разряды, которые имеются у всех без исключения слагаемых, остальные десятичные знаки отбрасываем с округлением. Далее, складываем по обычным правилам.*

Так же поступаем и при вычитании. Вычтем, например, 0,08365 из 0,242. Пишем:

$$\begin{array}{r|l} 0{,}242 & .. \\ -\ 0{,}08\dot{3} & \cancel{6}\cancel{5} \\ \hline 0{,}158 & \end{array}$$

Ответ будет 0,158.

Если дано несколько чисел с большим числом верных цифр (т. е. с малой процентной ошибкой), а результат нужно получить с малым числом верных цифр, то поступаем так: подписываем слагаемые столбиком, отсчитываем в наибольшем слагаемом слева направо одной цифрой больше, чем то число верных цифр, которое нужно получить у суммы, ставим правее него вертикальную черту и отбрасываем все знаки, стоящие правее черты, соблюдая правила округления и отмечая точкой увеличение цифры на единицу. Затем складываем обычным порядком и результат округляем, отбрасывая последнюю цифру.

Пример. Найдем сумму чисел

$$345{,}73+0{,}8892+25{,}48+2{,}3391$$

с тремя верными цифрами. Выписываем наши слагаемые «столбиком», отсчитываем в самом большом слагаемом (345,73) слева направо четыре цифры (одной больше, чем нужно получить в сумме) и проводим правее десятых долей черту:

$$\begin{array}{r|l} 345{,}7 & \cancel{3}.. \\ 0{,}\dot{8} & \cancel{8}\cancel{9}\cancel{2} \\ +\ 25{,}\dot{4} & \cancel{8}.. \\ 2{,}3 & \cancel{3}\cancel{9}\cancel{1} \\ \hline 374{,}4 & \end{array}$$

Округляем, просто отбрасывая четверку. Получим ответ: 374. Все три цифры верны.

Отметим одну неприятную особенность вычитания приближенных чисел. Если вычитаются числа, близкие друг к другу, причем числа приближенные, но имеющие много верных цифр, то в результате может получиться число очень грубо приближенное. Вычтем, например, 84,25 из 84,36. И уменьшаемое и вычитаемое имеют по четыре верных знака. Сколько каждое из них содержит тысячных долей, мы не знаем. Вычтя первое из второго, получим 0,11. О тысячных, разумеется, по-прежнему ничего не знаем. Получим всего две верные цифры.

По этой именно причине все формулы и схемы технических расчетов стараются составлять так, чтобы избежать вычитания близких друг к другу чисел.

Примеры. Сложить с возможно большей точностью и в каждом примере оценить абсолютную и процентную погрешности:

$$32{,}415+0{,}0834+4212{,}3+0{,}08;$$
$$2{,}36+4{,}383+0{,}000016;$$
$$43{,}3+24{,}2+8{,}311+20{,}13;$$
$$842{,}61-33{,}9;\quad 562{,}1-561{,}2.$$

В следующих примерах получить результат с тремя верными цифрами:

$$213{,}65+0{,}08343+14{,}6368+12{,}53;$$
$$42{,}63+8{,}0082+0{,}000636+19{,}14;$$
$$5{,}8163+0{,}001234+6{,}2435+0{,}8383.$$

Умножение приближенных чисел

Если приближенное число нужно умножить на точное (например, удвоить, утроить и т. д.), то поступаем так же, как при умножении точных чисел. Процентная погрешность произведения равна при этом процентной погрешности приближенного множителя, поэтому в произведении оставляем столько цифр, сколько их в приближенном множителе. Например,

$$3{,}66\times 2=7{,}32;\quad 7{,}68\times 9=69{,}12\approx 69{,}1.$$

Если оба сомножителя заданы приближенно, то дело обстоит иначе.

Отметим, прежде всего, следующее важное обстоятельство: *число верных цифр произведения равно числу верных цифр наименее точного множителя.* Если, например, в одном множителе четыре верные цифры, а в другом — только две, то в произведении можно будет ручаться только за две цифры. Поэтому и первый множитель можно округлить, сохранив в нем только две верные цифры.

При приближенном умножении у всех множителей сохраняют одинаковое число верных цифр.

Действие располагаем так: подписываем множитель под множимым, подчеркиваем, ставим слева знак умножения. Запятых обычно не пишем.

Если надо, например, умножить 25,63 на 0,8345, то запишем это так:

$$25{,}63 \times 0{,}8345 =$$

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}2563\\8345\end{array}\\ \hline \end{array}$$

..... (точки показывают, что дей-
..... ствие будет продолжаться).

Умножаем теперь крайнюю левую цифру множителя на множимое, результат подписываем под чертой, а затем зачеркиваем крайнюю левую цифру множителя и крайнюю правую цифру множимого:

$$25{,}63 \times 0{,}8345 =$$

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}2\,56\cancel{3}\\ \cancel{8}\,345\end{array}\\ \hline 20\,504\\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{array}$$

Далее умножаем крайнюю слева *незачеркнутую* цифру множителя на незачеркнутую часть множимого. Результат записываем под первым произведением, *не* сдвигая его влево (в отличие от обычного умножения), а единицы под единицами и т. д. Выполнив действие, зачеркиваем вторые слева и справа цифры

$$25{,}63 \times 0{,}8345 =$$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 2\ 5\cancel{6}\cancel{3} \\ \cancel{8}\ \cancel{3}45 \end{array} \\ \hline 20\ 504 \\ 768 \\ \cdots \\ \cdots \end{array}$$

Снова крайнюю левую незачеркнутую цифру множителя умножаем на незачеркнутую часть множимого и так продолжаем до тех пор, пока не зачеркнем все цифры.

Остается сложить все произведения. Последнюю цифру отбрасываем, а предпоследнюю увеличиваем на единицу независимо от того, какова отброшенная цифра. Это правило может иногда привести к ошибке в одну единицу последнего знака. На практике этим обычно не смущаются*). Соображаем, где поставить запятую. Двадцать пять умножаем на восемь десятых, т. е. почти на единицу. Результат должен быть около двадцати. Значит, запятую нужно поставить после второй цифры слева. Вся запись в окончательной форме выглядит так:

$$25{,}63 \times 0{,}8345 = 21{,}39$$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} \cancel{2}\ \cancel{5}\cancel{6}\cancel{3} \\ \cancel{8}\ \cancel{3}\cancel{4}\cancel{5} \end{array} \\ \hline 20\,504 \\ + \begin{array}{r} 768 \\ 100 \\ 10 \end{array} \\ \hline 21\ 382 \end{array}$$

*) Мы получим верное произведение при условии, что каждый сомножитель имеет не более десяти знаков.

Перемножим наши числа, пользуясь обычным правилом:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 25{,}63 \\ 0{,}83\ 45 \end{array} \\ \hline 1\ 28\ 15 \\ +\begin{array}{r} 10\ 25\ 2 \\ 76\ 89 \end{array} \\ 20\ 50\ 4 \\ \hline 21{,}38\ 82\ 35 \end{array} \qquad 25{,}63 \times 0{,}8345 = 21{,}39.$$

При пользовании обычным правилом приходится делать много лишних умножений и складывать более громоздкие числа, а точность в конечном итоге получается та же самая.

Вот еще примеры:

1) $298 \times 0{,}0365 = 10{,}8$

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 298 \\ 365 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 894 \\ 174 \end{array} \\ 10 \\ \hline 1078 \end{array}$$

2) $654{,}385 \times 5434 \cdot 10^3 = 3556 \cdot 10^6$

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 6\,544 \\ 5\,434 \end{array} \\ \hline 32\,720 \\ +\begin{array}{r} 2\,616 \\ 195 \end{array} \\ 24 \\ \hline 35\,555 \end{array}$$

Обращаем внимание читателя на второй пример. В одном из сомножителей шесть верных цифр, в другом — всего четыре. Значит, в произведении получится четыре верные цифры, а потому и в первом сомножителе достаточно сохранить четыре цифры (округлив его по обычному правилу). Как теперь определить число нулей в конце произведения? Один из наших сомножителей близок к 600, другой — к 5000, их произведение будет близко к 3 000 000, т. е. будет содержать семь цифр; да 10^3 даст еще три нуля. Всего десять цифр. Четыре мы имеем (3556). Остается приписать 6 нулей или множитель 10^6.

Сформулируем теперь общее правило перемножения двух приближенных чисел, данных с одинаковым числом верных знаков.

Чтобы перемножить два приближенных числа, имеющих поровну верных цифр, подписываем одно под другим и подчеркиваем. Умножаем левую цифру множителя на множимое, результат подписываем под чертой, а крайнюю левую цифру множителя и правую множимого зачеркиваем. Умножаем затем первую слева из незачеркнутых цифр множителя на незачеркнутую часть множимого, результат подписываем под первым произведением, единицы под единицами, десятки под десятками и т. д., не сдвигая его влево. После этого зачеркиваем вторые слева и справа цифры множителя и множимого. Продолжаем это до тех пор, пока не исчерпаем всех цифр множимого и множителя. После этого складываем все числа, написанные под чертой, зачеркиваем последнюю цифру суммы, предпоследнюю увеличиваем на единицу и ставим запятую или добавляем нули.

Заметим, что если первые цифры множимого и множителя малы (дают в произведении меньше десяти), то при этом способе вычисления может получиться одной верной цифрой меньше, чем мы ожидаем. Умножим, например, 214 на 143:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}214\\ 143\end{array} \\ \hline 214 \\ +\ \ 84 \\ 6 \\ \hline 304 \end{array}$$

Верные цифры будут: 31. Умножая 200 на 100, получим 20 000; значит, и наше произведение будет содержать пять цифр; следовательно, $214 \times 143 \approx 31 \cdot 10^3$. Нужно сказать, что в этом случае можно сохранять все цифры приближенного произведения, увеличив последнюю на единицу, т. е. писать $214 \times 143 \approx 305 \cdot 10^2$. Но при этом последняя цифра может на единицу или двойку отличаться от истинной. Обычно этим не смущаются, получая и в этом случае три цифры в произведении.

Примеры. $24{,}36 \times 8{,}25$; $0{,}632 \times 4{,}234$; 363×515 *); $0{,}053825 \times 4{,}6848$; $2{,}3 \times 64 \cdot 10^5$; $24{,}45 \times 3816 \cdot 10^2$; $32{,}38 \times 5{,}634$; $6{,}12 \times 8{,}734$; $436 \cdot 10 \times 2{,}83$; $52{,}63 \times 360{,}6$; $283{,}1 \times 44{,}95$; $126 \times 25{,}3$; $3{,}18 \times 0{,}0212$; $1{,}27 \times 0{,}425$.

Устное умножение приближенных чисел, содержащих по три верные цифры

Если приближенные числа содержат по две верные цифры, то нет надобности прибегать к правилу, данному в предыдущем параграфе. Ведь двузначные числа легко перемножаются в уме. Но оказывается, что при приближенных вычислениях нетрудно перемножить в уме трехзначные числа, получая в произведении три верные цифры. Ввиду того, что расчеты с тремя верными цифрами важнее всего для практики (в технике чаще всего допускается погрешность в 1%), с этим приемом стоит познакомиться **).

Перемножим, например, 546 на 385, считая эти числа приближенными и интересуясь только первыми тремя цифрами произведения. *Умножаем первую цифру множителя на первые две цифры множимого:* три на пятьдесят четыре даст 162. Далее *умножаем вторую цифру множителя на первую цифру множимого:* восемью пять — сорок. Складываем эти результаты: было 162 да сорок — всего 202. Теперь *остается добавить поправку, которую получаем так: умножаем первую цифру множимого на последнюю множителя, вторую цифру множимого на*

*) Оба числа — приближенные. Предполагается, что и то и другое содержат какие-то десятые, но мы не знаем, сколько именно.

**) Если приходится делать много вычислений, то и в этом случае выгоднее пользоваться логарифмической линейкой.

вторую множителя, третью цифру множимого на первую множителя. Все три произведения складываем и первую цифру суммы добавляем к первому результату. В нашем примере: пятью пять — двадцать пять, да четырежды восемь — тридцать два, всего пятьдесят семь, да шестью три — восемнадцать, всего семьдесят пять. Первая цифра — семь, добавляем ее к 202 — получаем 209; *результат на единицу увеличиваем:* получаем 210. *Это и будут искомые три цифры произведения.* Сообразим, сколько нужно приписать нулей. Пятьсот на триста даст 150 000, значит, должно получиться шестизначное число; три цифры у нас есть; остается добавить три нуля. Получим окончательно 210 000. Впрочем, лучше записать ответ так: $210\cdot 10^3$, подчеркивая его приближенный характер и ручательство за три первые цифры.

Точно так же поступаем, когда нужно перемножить нецелые числа.

Умножим, например, 0,861 на 23,8. Сначала на запятые вовсе не обращаем внимания. Два на восемьдесят шесть — 172, да трижды восемь — 24, всего 196. Вычисляем поправку: восемью восемь — 64, да трижды шесть — 18, всего 82, да один раз 2 — всего 84. Первая цифра 8. Увеличиваем ее на единицу и прибавляем к нашему первому результату (196) — получим 205. Это первые три цифры искомого результата. Где же будет запятая? Множимое близко к 0,8, множитель — к 20. Умножив 20 на 0,8, получим 16. Значит, и в нашем произведении до запятой должно стоять два знака. Окончательный ответ будет: 20,5.

Если первые цифры множимого и множителя невелики, то этот прием лучше несколько видоизменить.

Умножим, например, 251 на 194. Один на двадцать пять — двадцать пять, да девятью два — восемнадцать, всего 43. Получилось всего д в е ц и ф р ы, а не три; поэтому мысленно *приписываем к результату нуль, получим* 430, *а поправку прибавим полностью, не ограничиваясь ее первой цифрой.* Вычисляем поправку: дважды четыре — восемь, да пятью девять — сорок пять, всего пятьдесят три, да один, да единицу накидываем — пятьдесят пять. Четыреста тридцать да пятьдесят пять —

получается 485. Соображаем, сколько нулей следует добавить. Оба сомножителя близки к 200, значит, произведение будет близко к 40 000. Поэтому окончательный результат будет: $485\cdot 10^2$.

Примеры (сделать устно). 248×563; $21{,}9\times 81{,}1$; $0{,}312\times 5{,}26$; $4{,}14\times 0{,}0295$; $12{,}3\times 2{,}29$; $8{,}36\times 0{,}00316$; $663\times 2{,}85$; $0{,}0812\times 0{,}781$; $24{,}5\times 0{,}0311$.

Деление приближенных чисел

При делении приближенного числа на точное (пополам, на 3, на 5 и т. п.) поступаем с ним так же, как с точным. В частном оставляем столько значащих цифр, сколько верных цифр было в делимом.

Например, $94{,}26:3=31{,}42$; $8{,}25:7=1{,}178\approx 1{,}18$.

Когда и делимое и делитель — числа приближенные, то число верных цифр частного равно числу верных цифр того из данных чисел, в котором верных цифр меньше. Если число верных цифр делимого и делителя не одинаково, то более точное из них округляют так, чтобы верных цифр стало поровну. Если, например, нужно разделить 83,756 на 22,1, то делимое следует округлить, отбросив две последние цифры, т. е. делить 83,8 на 22,1. Точность при этом не уменьшится: все равно в частном можно получить только три верные цифры.

Начинаем делить так же, как при обычном делении. *Делитель пишем справа от делимого и отделяем его «углом».*

При делении, например, 320 на 265 начинаем, как обычно:

$$\begin{array}{r|l} 320 & 265 \\ -265 & \overline{1,\ldots} \\ \hline 55 & \\ \ldots\ldots & \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

Выполнив первое деление и получив первый остаток, не приписываем к нему нуля, как при обычном делении, а зачеркиваем последнюю цифру делителя, *соблюдая при этом правило округления.* Затем продолжаем делить и получаем вторую цифру частного и второй остаток:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 7 \\
-320 & 2\cancel{6}\cancel{5} \\
\underline{265} & 1{,}2\ldots \\
-55 & \\
\underline{54} & \\
1 & \\
\ldots & \\
\ldots &
\end{array}
$$

Зачеркиваем следующую цифру делителя и так поступаем до тех пор, пока не исчерпаются все цифры.

В нашем примере деление закончится после третьей операции. Окончательная запись выглядит так:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \cancel{3}7 \\
-320 & \cancel{2}\cancel{6}\cancel{5} \\
\underline{265} & 1{,}20 \\
-55 & \\
\underline{54} & \\
\underline{\underline{1}} &
\end{array}
$$

Ответ: 1,20

Зачеркивая вторую цифру (7), мы по правилу округления увеличиваем предыдущую на 1. Поэтому двойка зачеркнута и над ней поставлена тройка. После третьей операции и эта тройка будет зачеркнута.

Если делимое меньше делителя, то пишем в частном нуль целых и запятую, а к делимому приписываем справа нуль. Разделим, например, 4832 на 6218:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2 \\
-48\,320 & \cancel{6}\cancel{2}\cancel{1}\cancel{8} \\
\underline{43\,526} & 0{,}7771 \\
-4\,794 & \\
\underline{4\,354} & \\
-440 & \\
\underline{434} & \\
-6 & \\
\underline{\underline{6}} &
\end{array}
$$

Ответ 0,7771 содержит четыре цифры. Все эти цифры — верные.

При этом способе деления иногда случается обстоятельство, которое может поставить начинающего втупик. Разделим, например, 999 на 835:

$$\begin{array}{r|l} -999 & 8\overset{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cancel{5} \\ \cline{2-2} 835 & 1,1\ldots \\ \hline -164 & \\ 84 & \\ \hline 80 & \\ \ldots & \\ \ldots & \end{array}$$

Теперь нужно 80 делить на 8. Получается десять — двузначное число. Как быть? В этом случае пишут на очередном месте нуль, а предыдущую цифру увеличивают на единицу. Запись выглядит так:

$$\begin{array}{r|l} -999 & \cancel{8}\overset{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cancel{5} \\ \cline{2-2} 835 & \cancel{1,1(10)}\ \rbrack \\ \hline -164 & 1,20 \\ 84 & \\ \hline -80 & \\ 80 & \\ \hline\hline \end{array}$$

На третьем месте ставим нуль, вместо единицы на втором месте пишем двойку, а восемь умножаем на 10 и вычитаем из последнего остатка, как обычно.

В примерах, разобранных нами, делимое и делитель были целыми числами (приближенно целыми, разумеется). Если оба они или хотя бы одно из них имеет десятичную часть, то сначала запятые отбрасываются, деление выполняется, как в разобранных примерах, а затем запятая ставится «по соображению». Разделим, например, 2,38 на 0,0870. Начинаем с того, что делим 238 на 870, причем запятой в частном не пишется (не пишем и нуля, ей предшествующего). *Нуль на конце делителя* *отброшен быть не может,* иначе счет цифр изменится. Действие будет выглядеть так:

$$
\begin{array}{r|l}
-2\,380 & \overset{9}{\cancel{8}}\cancel{7}\cancel{0} \\ \cline{2-2}
1\,740 & 27{,}3 \\ \cline{1-1}
-640 & \\
609 & \\ \cline{1-1}
-31 & \\
27 & \\ \cline{1-1}
4 & \\ \hline\hline
\end{array}
$$

Чтобы поставить запятую, рассуждаем так: две целых делим на 8 сотых, т. е. почти на одну десятую. Делить на одну десятую — это все равно, что умножить на 10. Значит, получится около 20. Следовательно, запятую надо поставить после второй цифры слева: 27,3.

Разделим еще $423\cdot10^3$ на 29,2. Делим 423 на 292:

$$
\begin{array}{r|l}
-423 & \overset{3}{\cancel{2}}\cancel{9}\cancel{2} \\ \cline{2-2}
292 & 145\cdot10^2 \\ \cline{1-1}
-131 & \\
116 & \\ \cline{1-1}
-15 & \\
15 & \\ \hline\hline
\end{array}
$$

Как быть с запятой или с дополнительными нулями? Рассуждаем, как в предыдущем примере: $423\cdot10^3$ близко к 400 000, 29,2 близко к 30. Если бы мы стали делить 400 000 на 30, то получили бы несколько больше, чем 10 000. Значит, к полученному частному нужно добавить два нуля или лучше приписать множитель 10^2 (подчеркивая приближенный характер ответа и верность трех знаков), что и сделано в нашем примере.

Обратим еще внимание на случай, когда делимое — точное число, а делитель — приближенное. В этом случае к делимому можно приписывать сколько угодно нулей, так как мы уверены, что единиц низших разрядов оно не содержит. Приписываем к нему столько нулей, чтобы можно было начать деление; в дальнейшем поступаем, как в уже разобранных примерах. Разделим, например, 1 на 0,0835. Сначала отбрасываем запятую и делим 1 на 835. К единице приписываем 3 нуля, чтобы можно было начать деление:

$$\begin{array}{r|l}
-1000 & \cancel{8}\overset{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cancel{5} \\ \cline{2-2}
835 & \cancel{11,(10)} \\ \cline{1-1}
-165 & 12,0 \\
84 & \\ \cline{1-1}
-81 & \\
80 & \\ \cline{1-1}
1 & \\ \cline{1-1} \cline{1-1}
\end{array}$$

Чтобы поставить запятую, рассуждаем так: 1 делим на 0,0835, т. е. почти на 0,1. Разделить на 0,1 — это все равно, что умножить на 10. Следовательно, ответ должен быть близок к 10; поэтому запятую нужно поставить после второй цифры слева, что мы и сделали. Нуль после запятой не отбрасываем, так как он показывает нашу уверенность в отсутствии десятых долей.

Примеры. 81,2:4,39; 12,84:62,3; 28,2:616; 26:7,3; 863:541; 6,23:72,8; 34,18:27,000... (делитель точно равен 27); $642\cdot10^3:581\cdot10^2$; 36,3:267; $262\cdot10^2:170\cdot10^4$; 1:285; 2:463,3; 3:0,08485 (в последних трех примерах считать, что делимое — точное число).

Как ставить запятую при приближенном умножении и делении

Когда нужно определить место запятой при умножении и делении точных десятичных чисел, мы пользуемся определенными правилами. Такого же рода правила существуют и для приближенных действий, но они громоздки и на практике ими не пользуются. Во всех разобранных нами примерах мы ставили запятую «по соображению». Дадим теперь общие указания, которые помогут рационализировать эти «соображения».

Рассуждение сводится к тому, что оба сомножителя (в случае умножения) или делимое и делитель (в случае деления) округляются (в уме) так, чтобы в каждом из них осталась одна верная цифра.

Если эта цифра велика (7, 8 или 9), то заменяем ее единицей высшего разряда. Полученные однозначные числа легко разделить или перемножить. Получается очень грубый приближенный результат, который все же позволит судить, где в окончательном итоге должна быть занятая.

Рассмотрим примеры.

1) $17{,}3 \times 27{,}9$. Первый множитель близок к 20, второй — к 30. Значит, произведение должно быть близко к 600 ($20 \times 30 = 600$), т. е. в нем будет три цифры левее запятой.

2) $0{,}891 \times 0{,}0235$. Первый множитель близок к 1, второй к 0,02. Значит, произведение будет близко к двум сотым, т. е. будет иметь один нуль после запятой.

3) $34{,}2:8210$. Делимое близко к 30, делитель к 10 000. Деля 30 на 10 000, получим: $\frac{30}{10\,000} = 0{,}003$. Значит, в частном должно быть два нуля после запятой.

4) $76{,}3:0{,}000317$. Делимое близко к 100, делитель к 0,0003. Деля 100 на 0,0003, получим: $\frac{100}{0{,}0003} = \frac{1\,000\,000}{3} \approx$ $\approx 300\,000$. Значит, в частном до запятой должно быть шесть цифр.

О приближенном извлечении квадратных корней

Мы знаем, что произведение некоторого числа на равное ему число (произведение двух одинаковых сомножителей) называется второй степенью или *квадратом* данного числа. Часто приходится решать обратную задачу: по данному квадрату находить число. Узнаем, например, длину комнаты, если известно, что длина и ширина ее одинаковы, а площадь равна 36 квадратным метрам. В этой задаче требуется найти число, которое при умножении само на себя дает 36. Такое число нетрудно найти подбором: это будет 6. Значит, длина и ширина комнаты должна быть по 6 метров. Если бы по-прежнему было известно, что длина и ширина комнаты одинаковы, но площадь ее была бы 29 квадратных метров, то решить задачу мы не сумели бы. Ясно, что длина комнаты больше 5 *м* ($5\times 5=25$) и меньше 6 *м* ($6\times 6=36$), значит, это будет 5 с какой-то дробью. Но с какой именно? Чтобы отвечать на такие вопросы, нужно познакомиться с новым арифметическим действием — с извлечением квадратного корня.

Квадратным корнем из данного числа называется такое число, которое при умножении само на себя дает данное число. Например, квадратным корнем из девяти будет три, потому что трижды три — девять. Точно так же квадратным корнем из 25 будет 5, квадратным корнем из 100 будет 10, квадратным корнем из 1 будет 1. Для квадратного корня употребляется значок $\sqrt{\ }$, который называется *радикалом*. Пишут:

$$\sqrt{9}=3;\quad \sqrt{25}=5;\quad \sqrt{100}=10;\quad \sqrt{1}=1.$$

Действие, с помощью которого по данному числу находят его квадратный корень, называется извлечением квадратного корня.

При извлечении квадратных корней следует помнить наизусть таблицу квадратов, которая является, впрочем, частью обыкновенной таблицы умножения. Вот эта таблица:

$$0^2=0;\quad 1^2=1;\quad 2^2=4;\quad 3^2=9;\quad 4^2=16;$$
$$5^2=25;\quad 6^2=36;\quad 7^2=49;\quad 8^2=64;\quad 9^2=81;$$
$$10^2=100.$$

Заметим, что нацело корень извлекается очень редко. Если же корень из целого числа не извлекается нацело, то он не извлекается и конечной дробью — дробь обязательно будет бесконечной.

Почти всегда корень извлекают приближенно, с той или иной степенью точности. *Сначала мы рассмотрим приближенное извлечение корней с тремя верными цифрами.* В числе, из которого извлекаем корень (*подкоренном* числе), тоже будем сохранять три верные цифры.

Извлечение корней из чисел с тремя верными цифрами

Начнем с извлечения корней из чисел, бóльших единицы, но меньших 100. Так как мы собираемся получить корень *с тремя* верными цифрами, то число, из которого извлекается корень, можно (а для сокращения вычислений даже нужно) округлить, оставив в нем *три* цифры. Извлечем, например, корень (с тремя верными цифрами) из 79,34. Прежде всего округляем это число. Получаем 79,3. В таблице квадратов числа 79,3 нет, но есть близкое к нему: 81. Корень из 81 равен 9. Будем считать *первым*, совсем грубым, значением нашего корня число 9.

$$\sqrt{79{,}3} \approx 9.$$

Делим данное число (79,3) *на первое приближение* (9), *в частном берем только две цифры*

$$\begin{array}{r|l}
-79{,}3 & 9 \\ \cline{2-2}
\underline{72} & 8{,}8 \\
-73 & \\
\underline{72} & \\
1 &
\end{array}$$

Из двух чисел — делителя (9) *и частного* (8,8), *берем меньшее* (8,) *и прибавляем к нему половину разности между бóльшим и меньшим числом. Получим второе приближение.* В нашем случае разность равна $9 - 8{,}8 = 0{,}2$. Ее половина есть 0,1 и, следовательно, второе приближение равно $8{,}8 + 0{,}1 = 8{,}9$. В записи это выглядит так:

$$\begin{array}{r|l}
-79{,}3 & 9 \\ \cline{2-2}
\underline{72} & 8{,}8 + 0{,}1 = 8{,}9 \\
-73 & \\
\underline{72} & \\
1 &
\end{array}$$

Второе приближение берем с двумя цифрами.

Для того чтобы получить третье приближение, поступим так. *Делим подкоренное число* (79,3) *на второе приближение* (8,9) (*частное берем с тремя верными цифрами*). *Из двух чисел — делителя* (8,9) *и частного* (8,91) — *берем меньшее* (8,9) *и прибавляем к нему половину разности между бóльшим и меньшим числом* (0,005). *Полученное третье приближение и даст нам искомый корень с тремя верными цифрами*

$$\begin{array}{r|l} -\,79{,}3 & 8{,}9+0{,}005\approx 8{,}91 \\ 712 & \overline{8{,}91} \\ \hline -\,810 & \\ 801 & \\ \hline -\,90 & \\ 89 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Искомый корень равен $\sqrt{79{,}34}=8{,}91$.

Рассмотрим еще пример. Извлечем корень из 41,5. Из таблицы квадратов видим, что искомый корень лежит между шестью ($6\times 6=36$) и семью ($7\times 7=49$). Но 41,5 не очень близко ни к 36, ни к 49. Поэтому возьмем в качестве первого приближения 6,5 (на практике чаще всего в качестве первого приближения приходится брать не целое число, как было у нас в первом примере, а целое число с половиной).

Далее располагаем действие так:

$$\begin{array}{r|l} -\,41{,}5 & 6{,}5 \\ 390 & \overline{6{,}3}+0{,}1=6{,}4\ \text{(второе приближение)} \\ \hline -\,250 & \\ 195 & \\ \hline 55 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,41{,}5 & 6{,}4+0{,}04=6{,}44 \\ 384 & \overline{6{,}48} \\ \hline -\,310 & \\ 256 & \\ \hline -\,540 & \\ 512 & \\ \hline 28 & \end{array}\qquad \sqrt{41{,}5}=6{,}44$$

Примеры. $\sqrt{6,29}$; $\sqrt{8,12}$; $\sqrt{10,9}$; $\sqrt{20,3}$; $\sqrt{38,7}$; $\sqrt{43,2}$; $\sqrt{50,3}$; $\sqrt{67,9}$; $\sqrt{83,1}$; $\sqrt{1,92}$.

(Проверить себя, возведя полученные результаты в квадрат.)

Рассмотрим теперь извлечение корня из произвольных чисел, но корень по-прежнему будем искать с тремя верными цифрами. Поэтому данное число тоже будем округлять так, чтобы в нем оставались три верные цифры. Если дано число, имеющее две верные цифры, то и в ответе нужно будет оставить только две цифры: третья будет сомнительной.

Округлив число, разбиваем его на грани, по две цифры в каждой, начиная от запятой в обе стороны (в первой и последней грани может получиться по одной цифре). Вот примеры такой «предварительной обработки» подкоренного числа; грани отделяем запятыми, поставленными сверху («апострофами»):

$$\sqrt{0,048325} \approx \sqrt{0,0483} = \sqrt{0',04'83}.$$
$$\sqrt{26\,365\,000} \approx \sqrt{26\,400\,000} = \sqrt{26'40'00'00}$$

(если число целое, то подразумеваем запятую в конце его).

$$\sqrt{38,965} \approx \sqrt{39',0},$$
$$\sqrt{0,00005654} \approx \sqrt{0,0000565} = \sqrt{0',00'00'56'5}.$$

Отбрасываем теперь все нули и вместо апострофа ставим запятую (снизу).

В первом	примере	получим	4,83.
Во втором	»	»	26,4.
В третьем	»	»	39,0.
В четвертом	»	»	56,5.

Из полученного числа извлекаем корень, как из числа, заключенного между единицей и сотней. Запятую ставим, руководствуясь следующим правилом: *если в подкоренном числе есть цифры левее запятой, то в корне будет* *столько цифр левее запятой, сколько в подкоренном числе было граней до запятой. Если же перед запятой имеется только нуль, то после запятой будет столько нулей, сколько в подкоренном числе после запятой было граней, состоящих сплошь из нулей.*

В первом нашем примере будем иметь:

$$\sqrt{0{,}048325} \approx \sqrt{0',04'83} = 0{,}_{***}.$$

(Перед запятой — только нуль; граней после запятой, состоящих сплошь из нулей, тоже нет. Сразу после запятой пойдут отличные от нуля цифры, обозначенные звездочками.)

Во втором примере:

$$\sqrt{26\,36\,5000} \approx \sqrt{26'40'00'00} = {}_{***} \cdot 10.$$

(До запятой — четыре грани. Значит, в корне должны быть четыре цифры до запятой. Мы найдем только три из них. Нужно либо приписать справа нуль, либо помножить результат на $10^1 = 10$.)

В третьем примере:

$$\sqrt{38{,}965} \approx \sqrt{39{,}0} = {}_{*,**}.$$

(Одна грань до запятой в подкоренном числе, одна цифра до запятой в корне.)

В четвертом примере:

$$\sqrt{0{,}00005654} \approx \sqrt{0',00\,00'56'5} = 0{,}00_{***}.$$

(После запятой имеются две грани, состоящие сплошь из нулей. Значит, корень будет содержать два нуля после запятой.)

Сделаем один пример полностью. Найдем квадратный корень из 0,0003387. «Обрабатываем» подкоренное число:

$$\sqrt{0{,}0003387} \approx \sqrt{0{,}000339} = \sqrt{0',00'03'39} = 0{,}0_{***}.$$

Извлекаем теперь корень из 3,39. Первым приближением может служить 2, так как 3,39 близко к 4.

$$\begin{array}{r|l} -\,3{,}39 & 2 \\ \underline{2} & \overline{1{,}6}+0{,}2=1{,}8 \\ -\,13 & \\ \underline{12} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,3{,}39 & 1{,}8+0{,}04=1{,}84 \\ \underline{18} & \overline{1{,}88} \\ -\,159 & \\ \underline{144} & \\ -\,150 & \\ \underline{144} & \end{array}$$

$$\sqrt{0{,}000339}=0{,}0184$$

Если нужно извлечь приближенный корень из точного числа, например из двух, то дописываем столько нулей, чтобы получились три цифры.

Так, в указанном примере пишем: $2=2{,}00$. Дальше поступаем обычным порядком; два больше единицы, но меньше четырех. Значит, $\sqrt{2}$ заключено между 1 и 2. Возьмем первым приближением 1,5:

$$\begin{array}{r|l} -\,2{,}0 & 1{,}5 \\ \underline{15} & \overline{1{,}3}+0{,}1=1{,}4 \\ 50 & \\ \underline{-45} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,2{,}0 & 1{,}4+0{,}01=1{,}41 \\ \underline{14} & \overline{1{,}42} \\ -\,60 & \\ \underline{56} & \\ -\,40 & \\ \underline{28} & \\ 12 & \end{array}$$

$$\sqrt{2}=1{,}41$$

Извлечение корней с любым числом цифр

Извлечение корня разбивается на несколько этапов.

1) Разбиваем подкоренное число на грани и ставим запятую (вместо одной из кавычек, отделяющих грани) так, чтобы получившееся число заключалось между 1 и 100.

2) Второй этап состоит в получении трех цифр корня. Для этого округляем подкоренное число до трех цифр, и по способу, изложенному в предыдущем разделе, находим три цифры корня.

3) Третий этап даст нам шесть цифр корня. Для этого: округляем подкоренное число до шести цифр и делим на имеющееся значение корня с тремя цифрами. Частное берем с шестью цифрами. Из двух чисел — делителя и частного — выбираем меньшее и прибавляем к нему половину разности между бо́льшим и меньшим. Получившееся число округляем, оставляя шесть цифр. Это и будет корень с шестью цифрами.

4) Следующий этап даст двенадцать цифр корня. От предыдущего он отличается только тем, что подкоренное число надо брать с двенадцатью (а не шестью) цифрами и делить на шесть цифр корня, полученного на третьем этапе (а не на три цифры корня, полученного на втором). Частное тоже надо брать с двенадцатью цифрами (а не с шестью). Для практики такая точность не нужна, и мы провели подробно это рассуждение для того, чтобы сделать ясным следующее общее

Правило Герона для удвоения числа цифр в приближенном значении корня. *Если у нас есть приближенное значение корня (с числом верных цифр, бо́льшим или равным трем!), то мы можем получить значение корня с удвоенным числом верных цифр. Для этого надо подкоренное число разделить на приближенное значение корня и оставить в частном цифр вдвое больше, чем в делителе. После этого из двух чисел — делителя и частного — надо взять меньшее и прибавить к нему половину разности между бо́льшим и меньшим. Результат округлить, оставив в нем вдвое больше цифр, чем в делителе. Это и будет новое приближенное значение корня.*

Этот процесс можно повторять неограниченное число раз и число цифр корня будет каждый раз удваиваться.

На практике при больших расчетах берут сразу (из таблиц) приближенное значение корня с таким расчетом, чтобы после первого же удвоения числа цифр достигалась нужная точность.

В заключение найдем корень $\sqrt{21,4658163384}$ с двенадцатью верными цифрами.

Находим корень с тремя цифрами. Подкоренное число округляем:

$$\begin{array}{r|l} -\,21,5 & 4,5+0,1=4,6 \\ 180 & \overline{4,7} \\ \hline -\,350 & \\ 315 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,21,5 & 4,6+0,03=4,63 \\ 184 & \overline{4,67} \\ \hline -\,310 & \\ 276 & \\ \hline -\,340 & \\ 328 & \\ \hline \end{array}$$

Корень с тремя цифрами 4,63.

Находим 6 цифр корня:

$$21,4658:4,63=4,63624$$

(фактического вычисления мы здесь не приводим). Корень с шестью цифрами будет:

$$4,63+0,00312=4,63312.$$

Находим 12 цифр корня:

$$21,4658163384:4,63312=4,63312332476$$
$$4,63312+0,00000166238=4,63312166238.$$

Это и будет искомый корень с 12 цифрами.

Примеры. $\sqrt{28\,300}$; $\sqrt{0,435}$; $\sqrt{2,3654}$; $\sqrt{0,000173}$; $\sqrt{512\,340}$; $\sqrt{0,0188}$; $\sqrt{168,45}$; $\sqrt{0,000039563}$; $\sqrt{0,000000200}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$.

(В трех последних примерах подкоренное число дано точно.)

Вычисления по формулам

При технических расчетах часто приходится решать много сходных между собой задач, задач с одинаковыми условиями, но с разными числовыми данными. В этих случаях очень важно установить возможно более простое правило, очень короткое, выразительное, удобное для запоминания и удобное для вычислений. Наиболее сжатым и совершенным видом такого правила является ф о р м у л а.

Рассмотрим такую задачу: поезд прошел 100 *км* за 2,5 часа. Определить скорость поезда, т. е. число километров, которое он делает в 1 час. Раз 100 *км* он делает в 2,5 часа, то в 1 час он сделает в 2,5 раза меньше; следовательно, нужно 100 разделить на 2,5. Получим 40 километров в час. Отсюда правило: чтобы найти скорость поезда, нужно пройденное им расстояние разделить на время, в течение которого это расстояние пройдено. Эту же мысль можно записать проще, именно так:

$$\text{скорость} = \frac{\text{пройденный путь}}{\text{время}}$$

или

$$\text{скорость} = (\text{пройденный путь}) : (\text{время}).$$

При этом сразу видно, какое арифметическое действие нужно произвести над данными величинами, чтобы получить искомую.

Можно сделать еще один шаг в деле рационализации записи. Вместо того, чтобы писать: «скорость», «путь», «время», — писать только первые буквы этих слов: «*с*» вместо «скорость», «*п*» вместо «путь», «*в*» вместо «время». Тогда наше правило запишется совсем коротко:

$$\boxed{c = \frac{п}{в}} \quad \text{или} \quad \boxed{c = п : в.}$$

Если теперь нужно решить задачу с другими числовыми данными, например, узнать скорость поезда, который за $\frac{3}{4}$ часа сделал 25 *км*, то мы можем не тратить времени на рассуждения. Берем наше правило: $c = п : в$, вместо «*п*» подставляем 25, вместо «*в*» $\frac{3}{4}$ и получаем:

$$c = 25 : \frac{3}{4} = \frac{25}{1} : \frac{3}{4} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} \text{ километра в час.}$$

Правило, в котором величины обозначены буквами и прямо указывается, какие арифметические действия нужно произвести над данными величинами, чтобы получить искомую, называется формулой.

Например:

$$\boxed{c = n : в}$$

есть формула для вычисления скорости движения. *Если дана формула для решения задач некоторого типа, то само решение сводится к подстановке в формулу чисел на место букв и выполнению указанных действий.*

В качестве примера приведем формулу для вычисления площади круга. Вот эта формула:

$$S = \frac{3,14 \times d^2}{4}.$$

Здесь буква S обозначает искомую площадь круга, буква d — диаметр (поперечник) круга. Формула показывает, что величину диаметра нужно возвести в квадрат (умножить саму на себя) и умножить на 3,14. Разделив то, что получится, на четыре, получим искомую площадь круга.

Если измерение дало, например, что диаметр вала равен 10,5 *см*, то для вычисления площади сечения вала подставляем в нашу формулу вместо d его значение, т. е. 10,5 *см*. Получим:

$$S = \frac{3,14 \times 10,5^2}{4} = \frac{1,57 \times 110,25}{2}$$

(подставили 10,5 вместо d, возвели 10,5 в квадрат и сократили на 2). Ввиду того, что 10,5 как результат измерения — величина заведомо приближенная, округляем ее квадрат (110,25), сохраняя три верные цифры, и выполняем действия в уме:

$$S = \frac{1,57 \times 110}{2} = 86,4 \text{ квадратного сантиметра.}$$

Формула является не только удобной записью правила. Алгебра учит нас, как с помощью формул находить пути к вычислению интересующих нас величин. Частично мы уже воспользовались этим в главе о процентных вычислениях. Вообще же эта часть работы с формулами выходит за рамки нашей книги. Ограничимся тем, что дадим несколько удобных формул для приближенных вычислений и покажем, как ими пользоваться.

Некоторые формулы приближенных вычислений

Приближенное деление очень упрощается, если знаменатель мало отличается от единицы. Вот формулы, которые показывают, как нужно поступать в этом случае:

$$\frac{a}{1+b} \approx a(1-b), \quad \frac{a}{1-b} \approx a(1+b).$$

Обе эти формулы можно объединить в одной записи

$$\boxed{\frac{a}{1 \pm b} \approx a(1 \mp b).}$$

Здесь a обозначает делимое, а b — очень маленькое число. Формулы показывают, что в этом случае деление можно заменить умножением. Если делитель чуть больше единицы, то умножаем делимое на число, меньшее единицы (первая формула). Если же делитель чуть меньше единицы, то умножаем делимое на число, большее единицы (вторая формула). Разделим, например, 2,73 на 1,03. Имеем:

$$\frac{2{,}73}{1+0{,}03} \approx 2{,}73(1-0{,}03) = 2{,}73 \times 0{,}97 = 2{,}65.$$

Поделим (для проверки) по обычным правилам

$$\begin{array}{r|l}
2{,}73 & 1{,}03 \\
\underline{2{,}06} & \overline{2{,}65} \\
670 & \\
\underline{618} & \\
520 & \\
\underline{515} &
\end{array}$$

Результат получается тот же самый. Здесь была использована формула с верхними знаками. Дадим пример на применение формулы с нижними знаками. Поделим 4,30 на 0,96. Имеем:

$$\frac{4{,}30}{0{,}96}=\frac{4{,}30}{1-0{,}04}\approx 4{,}30\times 1{,}04=4{,}47.$$

Обычное деление дает 4,48. Разница составляет всего $\frac{1}{4}$ % от делимого.

При обычных технических расчетах (допустимая процентная ошибка — 1%) этими формулами можно пользоваться во всех случаях, когда делитель отличается от единицы на 0,05 или меньше (т. е. когда делитель заключен между 0,95 и 1,05).

Этими же формулами можно пользоваться и в тех случаях, когда делитель близок не к единице, а к любому «круглому» числу. Покажем на примерах, как это делается.

Поделим 3,14 на 2,08. Соображаем, что 2,08 равняется 1,04, умноженному на 2. Пишем:

$$\frac{3{,}14}{2{,}08}=\frac{3{,}14}{2\times 1{,}04}=\frac{1{,}57}{1{,}04}=\frac{1{,}57}{1+0{,}04}.$$

Мы представили знаменатель в виде произведения двух чисел: «круглого» (двойка) и близкого к единице (1,04), и сократили делимое и делитель на 2. Остается применить первую формулу:

$$\frac{3{,}14}{2{,}08}=\frac{1{,}57}{1+0{,}04}\approx 1{,}57\times 0{,}96=1{,}51.$$

Еще пример. Поделим 8,86 на 50,9. Делитель близок к 50. Представим его в форме произведения пятидесяти на некоторый дополнительный множитель; чтобы найти этот множитель, делим (в уме) 50,9 на 50. Получаем 1,02. Значит, $50{,}9\approx 50\times 1{,}02$. Пишем:

$$\frac{8{,}86}{50{,}9}=\frac{8{,}86}{50\times 1{,}02}=\frac{0{,}177}{1+0{,}02}\approx 0{,}177\times 0{,}98=0{,}173.$$

В заключение поделим 16,8 на 388. Делитель близок к 400. Он равен 400 — 12. Помножим и разделим эту разность на 400; получим:

$$400\left(\frac{400}{400}-\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{100}{\cancel{400}}}\right)=400(1-0{,}03).$$

Значит,

$$\frac{16{,}8}{388}=\frac{16{,}8}{400\,(1-0{,}03)}=\frac{0{,}0420}{1-0{,}03}\approx 0{,}0420\times 1{,}03=0{,}0433.$$

Примеры. 3,69:1,04; 84,5:0,99; 436:0,97; 0,00185:1,05; 66,2:10,2; 793:98; 0,00160:0,97; $242\cdot 10^5$:10,4; 36,1:40,9; 53,5:1,98; 0,0718:2,03; 961:4,95; 1,00:3,05.

Дадим еще формулы для приближенного извлечения корней из чисел, близких к единице. Как и в первых двух формулах, b обозначает очень малое число; в обычных технических расчетах (процентная погрешность не больше 1%) b не должно быть больше 0,1.

Вот эти формулы:

$$\boxed{\sqrt{1\pm b}\approx 1\pm\frac{b}{2}\,.}$$

Пользоваться этими формулами очень легко. Вычислим, например, $\sqrt{1{,}06}$. Пользуемся первой формулой:

$$\sqrt{1{,}06}=\sqrt{1+0{,}06}\approx 1+\frac{0{,}06}{2}=1{,}03.$$

Здесь b равняется 0,06.

Вычислим еще $\sqrt{0{,}92}$. Имеем:

$$\sqrt{0{,}92}=\sqrt{1-0{,}08}\approx 1-0{,}04=0{,}96.$$

Вычисления гораздо проще, чем при извлечении корня по общему правилу.

Похожие формулы применяются в том случае, когда подкоренное число близко не к единице, а к любому точному квадрату, например к 4, к 9, к 16 и т. д. Формулы эти лишь немного сложнее предыдущих. Вот они:

$$\boxed{\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a}}$$

При обычных технических расчетах (процентная погрешность порядка одного процента) этими формулами можно пользоваться тогда, когда b раз в 10 меньше, чем a^2 (или еще того меньше).

Примеры.

$$1)\ \sqrt{17{,}0} = \sqrt{16+1} = \sqrt{4^2+1} \approx$$
$$\approx 4 + \frac{1}{8} = 4{,}13.$$

Здесь $a^2 = 16$, $a = 4$, $b = 1$.

Мы видим, что b составлят $\frac{1}{16}$ от a^2; это меньше, чем одна десятая, значит, наша формула применима.

$$2)\ \sqrt{27{,}3} = \sqrt{25+2{,}3} = \sqrt{5^2+2{,}3} \approx$$
$$\approx 5 + \frac{2{,}3}{10} = 5{,}23.$$

$$3)\ \sqrt{60{,}8} = \sqrt{64-3{,}2} = \sqrt{8^2-3{,}2} \approx$$
$$\approx 8 - \frac{3{,}2}{16} = 7{,}80.$$

Здесь приходится применить формулу с нижними знаками.

Примеры.

$\sqrt{1{,}04}$; $\sqrt{4{,}04}$; $\sqrt{0{,}99}$; $\sqrt{0{,}91}$;
$\sqrt{9{,}52}$; $\sqrt{38{,}3}$; $\sqrt{82{,}0}$; $\sqrt{94}$;
$\sqrt{23{,}8}$; $\sqrt{15{,}5}$; $\sqrt{27{,}1}$; $\sqrt{65{,}2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели основные, простейшие приемы вычислений как точных, так и приближенных, как устных, так и письменных. Этого очень мало для того, чтобы сделаться вычислителем-виртуозом, но *вполне достаточно*, чтобы стать *хорошим счетчиком-практиком*. Читатель, который заинтересуется приемами быстрого счета, может найти интересные сведения в книге Я. И. Перельмана «Занимательная арифметика». Лицам, интересующимся приближенными вычислениями, можно рекомендовать книгу Нейшуллера и Акушского «Как упростить вычисления». Значительно более трудной, но интересной является книга проф. А. Виттинга «Сокращенные вычисления».

Повторяем еще раз: счетчику-практику вполне достаточно сведений, имеющихся в этой книжке. Если есть время и охота, то лучше изучить различные вспомогательные средства вычисления: таблицы, графики, номограммы, русские счеты и *счетную линейку*. Изучение всех этих вспомогательных средств выходит, однако, за рамки нашей книги; их нужно изучать по специальным руководствам, к которым и отсылаем читателя.